

最佳传递函数矩阵及其鲁棒补偿器的设计

陈锦娣 耿福昌 徐和生

(北京工业学院自动控制系)

摘 要

本文利用频域法讨论了多变量线性定常系统的线性二次型最优控制问题, 导出了最佳传递函数矩阵, 并且给出了实现某些典型输入下的最佳传递函数矩阵的鲁棒补偿器的设计方法。

一、引 言

本文将文献〔1〕中单变量线性定常系统的最佳传递函数推广到多变量系统, 导出了最佳传递函数矩阵。所谓最佳传递函数矩阵, 就是线性二次型性能指标最优的一种频域表示, 确切地说, 就是在被控对象给定的前提下, 使其二次型性能指标为最优时系统的希望传递函数矩阵。利用最佳传递函数矩阵在频域中研究线性二次型最优问题, 无需象状态空间法在时域中那样, 分成调节器和跟踪两类问题进行研究, 跟踪问题与调节器问题相比, 在研究上不增加任何复杂性。因此, 最佳传递函数矩阵尤其适用于跟踪问题。此外, 最佳传递函数矩阵还具有直观、明瞭、物理概念清晰的优点。

本文还在文献〔2〕和〔3〕的基础上, 导出了实现最佳传递函数矩阵的鲁棒 (Robust) 补偿器的设计方法, 也就是本文导出的补偿器不仅能实现最佳传递函数矩阵, 而且对跟踪和调节问题而言, 具有鲁棒性。

二、二次型性能指标下的最佳传递函数矩阵

设被控对象的传递函数矩阵 $G(s)$ 为 $p \times p$ 非奇异真有理函数矩阵, 它能完全表征其动态特性

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s), \quad (1)$$

其中 $\{N(s), D(s)\}$ 为右互质 $p \times p$ 多项式矩阵, 且 $D(s)$ 的零点均在 s 的开左半平面内, 即被控对象是Lyapunov意义下稳定的。

系统的指标函数 J 取为下式线性二次型性能指标

$$J = \int_0^{\infty} [(y(t) - r(t))^T Q (y(t) - r(t)) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (2)$$

其中“ T ”表示转置, r 、 y 和 u 分别为系统的希望输出, (实际) 输出和控制作用, 它们都是 $p \times 1$ 向量, Q 和 R 均为 $p \times p$ 实对称正定加权矩阵。通常所说的二次型性能指标下的最优, 就是求一控制 $u(t)$ 使 (2) 式取极小值。

利用Parseval定理将(2)式时域积分指标转换成s域积分

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [(y(-s) - r(-s))^T Q (y(s) - r(s)) + u^T(-s) R u(s)] ds, \quad (3)$$

其中 $r(s) = L[r(t)]$, $y(s) = L[y(t)]$, $u(s) = L[u(t)]$. 令

$$u(s) = M(s)r(s), \quad (4)$$

其中 $M(s)$ 为 $p \times p$ 真有理函数矩阵, 其极点均在 s 的开左半平面内. 将(1)和(4)式代入(3)式整理后得

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} r^T(-s) [(G(-s)M(-s) - I)^T Q (G(s)M(s) - I) + M^T(-s) R M(s)] r(s) ds. \quad (5)$$

这样一来, 二次型性能指标下的最优由求一控制 u 使(2)式取极小值, 转化为求一 $M(s)$ 使(5)式取极小值了.

记使(5)式取极小值的 $M(s)$ 为 $M_0(s)$, 并记

$$M(s) = M_0(s) + \lambda M_1(s), \quad (6)$$

其中 λ 为实数, $M_0(s)$ 和 $M_1(s)$ 的极点均在 s 的开左半平面. 将(6)式代入(5)式整理后得

$$J = J_a + \lambda(J_b + J_c) + \lambda^2 J_d, \quad (7)$$

$$\text{其中 } J_a = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} r^T(-s) [(G(-s)M_0(-s) - I)^T Q (G(s)M_0(s) - I) + M_0^T(-s) R M_0(s)] r(s) ds, \quad (8)$$

$$J_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} r^T(-s) [(G(-s)M_1(-s))^T Q (G(s)M_0(s) - I) + M_1^T(-s) R M_0(s)] r(s) ds, \quad (9)$$

$$J_c = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} r^T(-s) [(G(-s)M_0(-s) - I)^T Q G(s)M_1(s) + M_0^T(-s) R M_1(s)] r(s) ds, \quad (10)$$

$$J_d = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} r^T(-s) [(G(-s)M_1(-s))^T Q G(s)M_1(s) + M_1^T(-s) R M_1(s)] r(s) ds. \quad (11)$$

J 取极小值的条件为

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = J_b + J_c = 0 \quad (12)$$

$$\text{和} \quad \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = J_d > 0, \quad (13)$$

从(11)式可以看出 J_d 的被积函数为 s 的偶函数,(13)式必然满足.从(9)和(10)式又可以看出 J_b 中的 s 用 $(-s)$ 代替之后的被积函数与 J_c 的被积函数相同,因此 $J_b = J_c$, J 取极小值的条件即为 $J_b = J_c = 0$,亦即

$$J_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} r^T(-s) [(G(-s)M_1(-s))^T Q(G(s)M_0(s) - I) + M_1^T(-s)RM_0(s)] r(s) ds = 0.$$

根据矩阵迹的性质: $z^T Ay = \langle z, Ay \rangle = \langle Ay, z \rangle = \text{tr}(Ayz^T)$ 上式可改写为

$$J_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ M_1^T(-s) [(G^T(-s)QG(s) + R)M_0(s)r(s) - G^T(-s)Qr(s)] r^T(-s) \} ds = 0. \quad (14)$$

记 $G_y(s) = [(G^T(-s)QG(s) + R)M_0(s)r(s) - G^T(-s)Qr(s)]r^T(-s)$, (15)

$$G_x(s) = M_1^T(-s)G_y(s), \quad (16)$$

则 $J_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} G_x(s) ds = 0. \quad (17)$

不失一般性,设 $r(s)$ 为严格真有理的,且它的零极点均在 s 的闭左半平面内,而 $G(s)$ 、 $M_0(s)$ 和 $M_1(s)$ 均为真有理的,故 J_b 的被积函数 $G_x(s)$ 各元的分母至少比分子高两次.

为讨论方便起见,今后我们将 $G(s)$ 、 $M(s)$ 和 $r(s)$ 在虚轴上的零极点视为在 s 的左半平面,而将 $G(-s)$ 、 $M(-s)$ 和 $r(-s)$ 在虚轴上的零极点视为在 s 的右半平面,在叙述时不再区分“开”与“闭”而简称为左半平面和右半平面.如果将(17)式之定积分视为以原点为中心,以无穷大为半径包围整个左半平面的封闭积分,则由柯希定理知,(17)式成立的条件是被积函数 $G_x(s)$ 在 s 的左半平面内解析.考虑到(16)式和 $M(-s)$ 在 s 的左半平面内解析的假设,使 $J_b = 0$ 的条件变为(15)式之 $G_y(s)$ 在 s 的左半平面解析.

$$\text{记} \quad T(s) = G^T(-s)QG(s) + R. \quad (18)$$

显见 $T(s) = T^T(-s)$ 是平行Hermite矩阵,且 $T(j\omega)$ 对实数域中所有 ω 均为正定,故可用谱分解方法将 $T(s)$ 分解成

$$T(s) = W^T(-s)W(s), \quad (19)$$

其中 $W(s)$ 的零极点均在 s 的左半平面^[4].从(18)式不难看出 $T(s)$ 是双真的,即 $T(s)$ 和 $T^{-1}(s)$ 均为真有理的,因而 $W^T(-s)$ 也是双真的, $W^{-T}(-s)$ 存在且为真有理的.将(18)和(19)式代入(15)式得

$$G_y(s) = W^T(-s) [W(s)M_0(s)r(s) - W^{-T}(-s)G^T(-s)Qr(s)] r^T(-s).$$

将上式中严格真有理函数 $W^{-T}(-s)G^T(-s)Qr(s)$ 分解为在 s 的左半平面解析和右半平面解析的两部分之和,则有

$$G_y(s) = W^T(-s) [W(s)M_0(s)r(s) - [W^{-T}(-s)G^T(-s)Qr(s)]^+] r^T(-s) - W^T(-s) [W^{-T}(-s)G^T(-s)Qr(s)]^- r^T(-s), \quad (20)$$

这里 $[\cdot]^+$ 和 $[\cdot]^-$ 分别表示在 s 的右和左半平面解析的部分。又因为 $G(s)$ 在 s 的左半平面解析, 故有

$$W(s)M_0(s)r(s) - [W^{-T}(-s)G^T(-s)Qr(s)]^+ = 0. \quad (21)$$

由上式解出 $M_0(s)r(s)$, 令 $u(s) = M_0(s)r(s)$ 即可使二次型性能指标 J 取极小值, 并有

$$y(s) = G(s)M_0(s)r(s) \triangleq G_0(s)r(s).$$

若将希望输出 r 作为参考输入, 则

$$G_0(s) = G(s)M_0(s) \quad (22)$$

即为二次型性能指标最优时从参考输入到输出之间的传递函数矩阵, 通常称为系统的最佳传递函数矩阵。



图 1

$M_0(s)$ 的表达式 将(1)式代入(18)式得

$$\begin{aligned} T(s) &= G^T(-s)QG(s) + R = D^{-T}(-s)N^T(-s)QN(s)D^{-1}(s) + R \\ &= D^{-T}(-s)[N^T(-s)QN(s) + D^T(-s)RD(s)]D^{-1}(s), \end{aligned} \quad (23)$$

定义平行Hermite矩阵,

$$N^T(-s)QN(s) + D^T(-s)RD(s) \triangleq D_0^T(-s)D_0(s) \triangleq \Delta(s) \quad (24)$$

其中 $D_0(s)$ 的零点均在 s 的左半平面。比较(19)、(23)和(24)式, 并考虑到 $D(s)$ 的零点均在 s 的左半平面的假设, 得

$$W(s) = D_0(s)D^{-1}(s). \quad (25)$$

$W(s)$ 的零极点均在 s 的左半平面。将(1)和(23)式代入(21)式得

$$M_0(s)r(s) = D(s)D_0^{-1}(s) \{ (N(-s)D_0^{-1}(-s))^T Qr(s) \}^+, \quad (26)$$

这里 $(N(-s)D_0^{-1}(-s))^T$ 在 s 的左半平面解析。

典型输入下的最佳传递函数矩阵 参考输入为阶跃函数 $r(s) = [1 \ 1 \dots 1]^T \frac{1}{s}$, 则

$$\{ (N(-s)D_0^{-1}(-s))^T Qr(s) \}^+ = (N(0)D_0^{-1}(0))^T Q [1 \ 1 \dots 1]^T \frac{1}{s},$$

所以

$$M_0(s) = D(s)D_0^{-1}(s)(N(0)D_0^{-1}(0))^T Q.$$

最佳传递函数矩阵

$$G_{01}(s) = G(s)M_0(s) = N(s)D_0^{-1}(s)(N(0)D_0^{-1}(0))^T Q. \quad (27)$$

参考输入为阶跃加斜坡函数 $r(s) = [1 \ 1 \dots 1]^T \frac{s+\alpha}{s^2}$, 则

$$\begin{aligned}
 & \left[(N(-s)D_0^{-1}(-s))^T Q r(s) \right]^+ = \left[(N(-s)D_0^{-1}(-s))^T Q [1 \dots 1]^T \frac{s+\alpha}{s^2} \right]^+ \\
 & = \left[\alpha (N(0)D_0^{-1}(0))^T Q + \left[\alpha \frac{d(N(-s)D_0^{-1}(-s))^T Q}{ds} \right]_{s=0} + (N(0)D_0^{-1}(0))^T Q \right] s \left[\frac{1}{s+\alpha} [1 \dots 1]^T \frac{s+\alpha}{s^2} \right]
 \end{aligned}$$

故最佳传递函数矩阵

$$\begin{aligned}
 G_{02}(s) = & N(s)D_0^{-1}(s)(s+\alpha)^{-1} \left[\alpha (N(0)D_0^{-1}(0))^T Q + \left[\alpha \frac{d(N(-s)D_0^{-1}(-s))^T Q}{ds} \right]_{s=0} \right. \\
 & \left. + (N(0)D_0^{-1}(0))^T Q \right] s. \quad (28)
 \end{aligned}$$

一般言之,若参考输入 $r(s) = [1 \dots 1]^T \frac{s^{l-1} + \alpha_1 s^{l-2} + \dots + \alpha_{l-1}}{s^l}$, $l=1, 2, \dots$,

则最佳传递函数矩阵为

$$G_{0l}(s) = N(s)D_0^{-1}(s)A^{-1}(s)B(s), \quad (29)$$

$$\text{其中 } A(s) = \alpha(s)I = (s^{l-1} + \alpha_1 s^{l-2} + \dots + \alpha_{l-1})I, \quad (30)$$

$$B(s) = B_0 s^{l-1} + B_1 s^{l-2} + \dots + B_{l-1}. \quad (31)$$

从(1)、(24)、(26)和(30)式可以断言, $A(s)D_0(s)$ 的列次数为

$$\delta_{ci}(A(s)D_0(s)) = \delta_{ci}D(s) + l - 1, \quad i=1, 2, \dots, p. \quad (32)$$

B_0 非奇异, $B(s)$ 的行次数为

$$\delta_{ri}B(s) = l - 1, \quad i=1, 2, \dots, p. \quad (33)$$

平行Hermite矩阵的谱分解 从最佳传递函数矩阵的推导过程可见,求取最佳传递函数矩阵的关键是对(24)式的平行Hermite矩阵 $\Delta(s)$ 进行谱分解.这可以通过双线性变换求出 $\Delta(s)$ 的 z 域表示,然后利用 z 域中对正实矩阵的Cholesky分解^[5],对 $\Delta(s)$ 的相应 z 域中的平行Hermite矩阵进行谱分解,最后进行反变换,即得 $\Delta(s)$ 的谱分解.

三、鲁棒补偿器的设计

最佳传递函数矩阵的渐近跟踪性质 (2)式要求 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) = 0$, 否则二次

型性能指标 J 将趋于无穷大.这意味着最佳传递函数矩阵应实现渐近跟踪,确切地说,阶跃输入下的最佳传递函数矩阵 $G_{01}(s)$ 对阶跃输入实现渐近跟踪,阶跃加斜坡输入下的最佳传递函数矩阵 $G_{02}(s)$ 对阶跃输入和斜坡输入实现渐近跟踪,如此等等,对于误差传递函数矩阵 $G_e(s) = I - G_0(s)$ 应有

$$I - G_{01}(0) = 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-k} (I - G_{02}(s)) = 0, \quad k = 0, 1.$$

一般言之

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-k} (I - G_{01}(s)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1 \quad (34)$$

最佳传递函数矩阵的鲁棒补偿器 设图2中既约被控对象的传递函数矩阵为

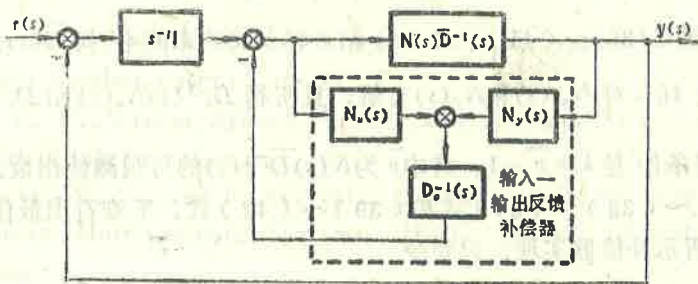


图 2 实现最佳传递函数矩阵的鲁棒补偿器

$$G(s) = N(s) \bar{D}^{-1}(s) s^{-l}, \quad (35)$$

其中 $\{N(s), s^l \bar{D}(s)\}$ 为 $p \times p$ 右互质多项式矩阵, 且 $s^l \bar{D}(s)$ 为列既约, 即有

$$\deg \det(s^l \bar{D}(s)) = \sum_{i=1}^p \delta_{ci}(s^l \bar{D}(s)) \triangleq \sum_{i=1}^p (\bar{\mu}_i + l). \quad (36)$$

$\det \bar{D}(s)$ 的零点均在 s 的左半平面, 且没有“0”零点。

(35) 式表明被控对象的每个通道中均有 l 个积分环节。如果被控对象中没有积分器或个数不够, 则应先加入预补偿。

输入-输出反馈补偿器的传递函数矩阵

$$C_u(s) = D_c^{-1}(s) N_u(s), \quad C_y(s) = D_c^{-1}(s) N_y(s), \quad (37)$$

其中 $D_c(s)$ 是行既约的, 其行次数

$$\delta_{ri} D_c(s) = k, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (38)$$

则图2所示系统从 r 到 y 的传递函数矩阵

$$G_f(s) = N(s) D_f^{-1}(s) D_c(s), \quad (39)$$

$$\text{其中 } D_f(s) = D_c(s) \bar{D}(s) s^l + D_c(s) N(s) + N_u(s) \bar{D}(s) s^l + N_y(s) N(s) s^l. \quad (40)$$

从 (39) 式容易看出

$$\delta_{ci} D_f(s) = \bar{\mu}_i + l + k, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (41)$$

$$\text{和 } \lim_{s \rightarrow 0} s^{-l+1} [I - G_f(s)] = 0. \quad (42)$$

将 (40) 式改写为

$$D_f(s) - D_c(s) \bar{D}(s) s^l - D_c(s) N(s) = (N_u(s) \bar{D}(s) + N_y(s) N(s)) s^l. \quad (43)$$

从(43)式可以看出, 矩阵 $[D_f(s) - D_c(s)N(s)]$ 中必定含有因式 $s^l I$, 即有

$$D_f(s) - D_c(s)N(s) = \bar{D}_f(s)s^l, \quad (44)$$

并且 $\delta_{ci}\bar{D}_f(s) = \bar{\mu}_i + k, \quad i=1, 2, \dots, p. \quad (45)$

将(44)式代入(43)式得

$$\bar{D}_f(s) - D_c(s)\bar{D}(s) = N_u(s)\bar{D}(s) + N_y(s)N(s). \quad (46)$$

文献[2]证明了满足(35)~(41)、(44)和(45)式约束的任何 $\bar{D}(s)$ 、 $N(s)$ 、 $\bar{D}_f(s)$ 和 $D_c(s)$ 方程(46)对 $N_u(s)$ 和 $N_y(s)$ 有解, 且所得 $D_c^{-1}(s)N_u(s)$ 和 $D_c^{-1}(s)N_y(s)$ 为真有理的充分必要条件是 $k \geq \bar{\nu} - 1$, 其中 $\bar{\nu}$ 为 $N(s)\bar{D}^{-1}(s)$ 的可观测性指数。

比较(29)~(33)、(34)式和(39)~(42)式, 不难看出最佳传递函数矩阵 $G_{0l}(s)$ 可用图2所示补偿器实现。只要令

$$G_f(s) = G_{0l}(s),$$

当 $l \leq \bar{\nu}$ 时, 取 $k = \bar{\nu} - 1$, 且

$$D_f(s) = H(s)A(s)D_0(s),$$

$$D_c(s) = H(s)B(s),$$

其中 $H(s) = Is^{\bar{\nu}-1} + H_1 s^{\bar{\nu}-2} + \dots + H_{\bar{\nu}-1} s^0.$

当 $l > \bar{\nu}$ 时, 取 $k = l - 1$, 且

$$D_f(s) = A(s)D_0(s),$$

$$D_c(s) = B(s)$$

即可。

应特别指出的是, 利用图2所示补偿器实现最佳传递函数矩阵时, 其渐近跟踪性质是通过在单位反馈系统中加入“内模”而实现的, 因此具有鲁棒性。具体地说, 无论被控对象(除“内模”之外) $N(s)\bar{D}^{-1}(s)$ 和输入-输出反馈补偿器 $D_c^{-1}(s)N_u(s)$ 和 $D_c^{-1}(s)N_y(s)$ 的参数如何变化, 只要“内模” $s^{-l}I$ 不变, (42)式始终成立。这就意味着,

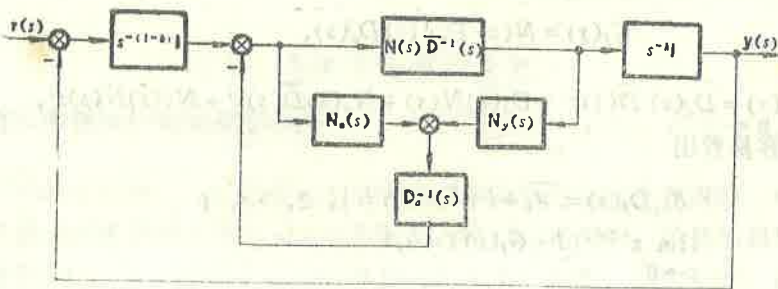


图3 实现最佳传递函数矩阵的鲁棒补偿器(二)

当系统中除“内模”之外的其他参数变化时,只要系统仍能保持渐近稳定,整个系统的渐近跟踪性质就不会改变。

同样,图3所示补偿器也可实现最佳传递函数矩阵 $G_{ol}(s)$,且对跟踪问题而言也具有鲁棒性。其推导过程与结论均与图2相同,故从略。

参 考 文 献

- [1] Chang, S. L., Synthesis of Optimum Control Systems, New York, Toronto, London, (1961), 11-22.
- [2] Chen, C. T., Linear System Theory and Design, New York, CBS College, (1984), 511-514.
- [3] Wolovich, W. A. and P. Ferreira, Output Regulation and Tracking in Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. AC-24, (1979), 460-465.
- [4] 黄琳, 系统与理论中的线性代数, 科学出版社, 北京, (1984), 741-742.
- [5] Wilkinson, J. H. and Reinsch, C., Handbook for Automatic Computation, Vol.2, Linear Algebra, New York, Springer, (1971).

Optimal Transfer Function Matrix and Robust Compensator Design

Chen Jindi, Geng Fuchang, Xu Hesheng

(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology)

Abstract

In this paper, We consider linear quadratic optimal problem for linear time-invariant multivariable systems by using complex variable methods. Optimal Transfer function matrix representation is derived. Robust compensator design for optimal transfer function matrix is also considered.