第6卷 增刊1 控制理论与应用 Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Jan., 1989

关于线性定常大系统的局部控制与状态估计

蔚润义 高为炳
（北京航空学院第七研究室）

摘 要

本文给出了一类线性定常大系统可局部镇定的充要条件．对一类较广的可局部镇定的大系统，本文证明它们是可以任置稳定度的．文中还得到了大系统存在分散观测器及分散控制的充要条件．所有证明都是构造性的．

一、引 言

研究线性定常大系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + \sum\limits_{j\ne i} A_{ij}x_j + B_iu_i \\ y_i = c_ix_i \end{cases} \qquad i\in \underline{N} \tag{1}$$

的局部控制和状态估计问题．其中，$x_i\in R^{n_i}$，$u_i\in R^{r_i}$，$y_i\in R^{m_i}$分别为第i个子系统的状态、输入和输出向量．$\underline{N}=\{1,2,\cdots,N\}$，$\sum\limits_{i=1}^{N}n_i=n$．

局部控制是指只引用局部状态反馈

$$u_i=K_ix_i,\quad i\in\underline{N}.$$

大系统的局部控制问题是一个重要的课题，它离彻底解决还相距很远．

二、大系统的局部控制与任置稳定度

引理 1 设A_{11}稳定，（A_{22},B_2）可镇定，则存在矩阵K_2，使

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2F_{21} & A_{22}+B_2K_2 \end{bmatrix}$$

稳定．

证 A_{11}稳定，故对任意$\alpha>0$，存在$V_1>0$，使

$$A_{11}^TV_1+V_1A_{11}=-\alpha I_{n_1}$$

（A_{22}，B_2）可镇定，则对任意$\beta>0$，存在$P_2>0$，使

$$A_{22}^TP_2+P_2A_{22}-P_2B_2B_2^TP_2+\beta I_{n_2}=0.$$

本文于1986年3月31日收到．1987年8月11日收到修改稿．

取$K_2=-B_2^TP_2$，$V=\mathrm{diag}[V_1,P_2]$，则有$\overline{A}^TV+V\overline{A}$负定等价于$\alpha I_{n_1}-F_{21}^TF_{21}-$ $-\beta^{-1}V_1A_{12}A_{12}^TV_1$正定。因此，只要选$\alpha,\beta$足够大，便有$\overline{A}$稳定。

定理 1　设对任意$i\in\underline{N}$，或$A_{ij}=B_iF_{ij}$对所有$j<i$成立，或$A_{ji}=B_jF_{ji}$对所有$j<i$成立，则系统（1）可局部镇定的充要条件为(A_{ii},B_i)可镇定，$i\in\underline{N}$。

证　在定理假设下，可通过变量置换使子系统间关联项具有性质$A_{\tau_i\tau_j}=B_{\tau_i}F_{\tau_i\tau_j}$，$j<i$。再利用引理1可证得充分性。注意到此时大系统的不可控模态等于所有子系统不可控模态的全体，必要性立即证得。

引理 2　设(A,B)可控，$Q>0$，$R>0$为具相应维数的正定阵，则对任意$\alpha>0$，系统

$$\dot{x}=(A-BR^{-1}B^TP)x$$

具稳定度α，其中P: $A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q+2\alpha P=0$。

定理 2　设(A_{ii},B_i)可控，$i\in\underline{N}$，$\alpha>0$为任一正数，$Q=\mathrm{diag}[Q_1,Q_2,\cdots,Q_N]>0$，$R=\mathrm{diag}[R_1,R_2,\cdots,R_N]>0$，由此可确定唯一矩阵$P=\mathrm{diag}[P_1,P_2,\cdots,P_N]>0$，

$$P_i:\quad A_{ii}^TP_i+P_iA_{ii}-P_iB_iR_i^{-1}B_i^TP_i+Q_i+2\alpha P_i=0.$$

令

$$S=(S_{ij}),\qquad S_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ A_{ij}P_j^{-1}, & i\neq j\end{cases}$$

如果　$Q-P(S+S^T)P>0$，

则系统（1）加局部反馈$u_i=-R_i^{-1}B_i^TP_ix_i$，$i\in\underline{N}$，后，具稳定度α。

证　应用引理2可得。

通过对关联项A_{ij}结构的描述，文[2]给出一类较大的可局部镇定的大系统。这里我们证明这类系统是可任置稳定度的，因而它们不会有分散固定模。为叙述简单起见，仅考虑单输入（$m_i=1$）情况，多输入情况亦有类似结论。

设(A_{ii},B_i)可控，且已化为可控标准形

$$A_{ii}=\begin{bmatrix}0 & I_{n_i-1}\\ & a_{ii}\end{bmatrix},\quad B_i=\begin{bmatrix}0_{n_i-1}\\ 1\end{bmatrix}.$$

记a_{ij}为A_{ij}的最后一行（$i\in\underline{N}$，$j\in\underline{N}$），

$$\overline{A}_{iD}=A_{ii}-B_ia_{ii},\quad A_{ij}=\left(\alpha_{pq}^{ij}\right)=\begin{cases}0, & j=i\\ A_{ij}-B_ia_{ij}, & j\neq i\end{cases},$$

$$\hat{A}_D=\mathrm{diag}[\hat{A}_{1D},\hat{A}_{2D},\cdots,\hat{A}_{ND}],\quad \hat{A}_C=(\hat{A}_{ij}),$$

$$\hat{B}_D=\mathrm{diag}[B_{1D},B_{2D},\cdots,B_{ND}],\quad a=(a_{ij})$$

则系统（1）可表为

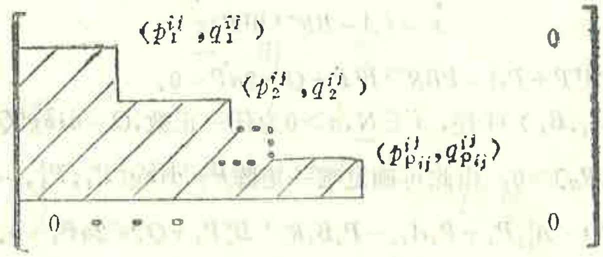
$$\dot{x}=(\hat{A}_D+\hat{A}_C+B_Da)x+B_Du. \tag{2}$$

定理 3 大系统（2）可局部任置稳定度，如果存在正数 ν_i，$i\in N$，使不等式

$$\sum_{i,j}[-\nu_ip^{ij}_{l_{ij}}+\nu_j(q^{ij}_{l_{ij}}-1)]<0,$$

对任意循环 $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t\}\subset N$ 及整数 $l_{ij}=1,2,\cdots,\rho_{ij}$ 均成立。其中 $i=\gamma_{\mu+1}$，$j=\gamma_\mu$，$A_{\gamma_{\mu+1}\gamma_\mu}\neq0$，$\gamma_{t+1}\triangleq\gamma_1$。整数 ρ_{ij} 和 $1\leqslant p_1^{ij}<p_2^{ij}<\cdots<p^{ij}_{\rho_{ij}}<n_i-1$，$1\leqslant q_1^{ij}<q_2^{ij}<\cdots<q^{ij}_{\rho_{ij}}\leqslant n_j$ 用以描述 $\hat{A}_{ij}\neq0$ 的结构。ρ_{ij} 为矩阵 $\hat{A}_{ij}$ 中"上梯形"的个数、$(p_l^{ij},\ q_l^{ij})$ 为第 l 个"上梯形"右上顶点元素（非零）的行列坐标，如下所示：

$\hat{A}_{ij}=$



证 任取正数 $\alpha>0$，矩阵 $\hat{Q}=\mathrm{diag}[\hat{Q}_1,\ \hat{Q}_2,\ \cdots,\ \hat{Q}_N]>0$，$\hat{Q}_i\in R^{n_i\times n_i}$，$\hat{R}=\mathrm{diag}[\hat{r}_1,\ \hat{r}_1,\ \cdots,\ \hat{r}_N]>0$，$\hat{r}_i\in R$。方程 $\hat{A}_D^T\hat{P}+\hat{P}\hat{A}_D-\hat{P}B_D\hat{R}^{-1}B_D^T\hat{P}+\hat{Q}+2\alpha\hat{P}=0$ 之解 $\hat{P}$ 具分散结构，设为 $\hat{P}=\mathrm{diag}[\hat{P}_1,\ \hat{P}_2,\ \cdots,\ \hat{P}_N]$。

引入

$$T=\mathrm{diag}[T_1,T_2,\cdots,T_N],\ T_i=\mathrm{diag}[\delta^{\nu_in_i},\delta^{\nu_i(n_i-1)},\cdots,\delta^{\nu_i}],\delta>0,$$

$$\overline{D}=\mathrm{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_N]>0,\ D=\mathrm{diag}[d_1I_{n_1},d_2I_{n_2},\cdots,d_NI_{n_N}],$$

$$\Delta=\mathrm{diag}[\delta^{\nu_1}I_{n_1},\delta^{\nu_2}I_{n_2},\cdots,\delta^{\nu_N}I_{n_N}],$$

其中 $\delta,d_i,i\in\underline{N}$ 待定。

定义

$$Q=DT\hat{Q}T+(\xi-1)(\Delta^{-1}DT\hat{P}T)B_D\overline{D}\hat{R}^{-1}B_D^T(\Delta^{-1}DT\hat{P}T)$$

$$-(\hat{A}_C+B_Da)^T(\Delta^{-1}DT\hat{P}T)-(\Delta^{-1}DT\hat{P}T)(\hat{A}_C+B_Da)+2\alpha(I-\Delta^{-1})DT\hat{P}T,$$

$$R=\xi^{-1}\overline{D}\hat{R}>0.$$

取控制

$$u=-Kx,\quad K=R^{-1}B_D^TP, \tag{3}$$

$$P:\ (\hat{A}_D+\hat{A}_C+B_Da)^TP+P(\hat{A}_D+\hat{A}_C+B_Da)$$
$$-PB_DR^{-1}B_D^TP+Q+2\alpha P=0. \tag{4}$$

根据引理2，如果Q正定，控制（3）分散，我们便知系统（2）可局部任置稳定度。

可以验证，方程（4）之解 $P=\Delta^{-1}DT\hat{P}T$，控制（3）是分散的

$$u_i=-k_ix_i,\qquad k_i=\xi\hat{r}_i^{-1}B_i^T\hat{P}_iT_i.$$

下面只需要证明可选ξ，δ，d_i使Q正定即可。配方得

$$Q=T\left\{\left[\frac{1}{2}\hat{Q}-\hat{P}(\Delta^{-1}T\hat{A}_CT^{-1})\right]^TD+D\left[\frac{1}{2}\hat{Q}-\hat{P}(\Delta^{-1}T\hat{A}_CT^{-1})\right]\right\}T$$
$$+(\xi-1)[(\Delta^{-1}DT\hat{P}T)B_D-(\xi-1)^{-1}a^T\overline{D}\hat{R}]\hat{R}^{-1}[(\Delta^{-1}DT\hat{P}T)B_D$$
$$-(\xi-1)^{-1}a^T\overline{D}\hat{R}]^T-(\xi-1)^{-1}a^T\overline{D}\hat{R}a+2\alpha(I-\Delta^{-1})DT\hat{P}T.$$

上式中，ξ充分大时，第二项半正定，第三项可任意小，$\delta>1$时第四项正定，考虑第一项，因

$$x^TD\left[\frac{1}{2}\hat{Q}-\hat{P}(\Delta^{-1}T\hat{A}_CT^{-1})\right]x$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}x_i^T\,d_i\hat{Q}_ix_i-\sum_{i,j}x_i^T\alpha_i\hat{P}_i\delta^{-\nu_i}T_i\hat{A}_{ij}T_jx_j$$
$$\geqslant(\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_N\|)\,\overline{D}W\begin{pmatrix}\|x_1\|\\ \|x_2\|\\ \vdots\\ \|x_N\|\end{pmatrix},$$

其中 $W=(w_{ij}),w_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\lambda_m(\hat{Q}_i)-\lambda_M(\hat{P}_i)\xi_{ii}\delta^{n_{ii}}, & i=j\\ -\lambda_M(\hat{P}_i)\xi_{ij}\delta^{n_{ij}}, & i\neq j\end{cases}$，

$\xi_{ij}=\sum\limits_{p,q}|\alpha_{pq}^{ij}|$，$n_{ij}=\max\limits_{1\leqslant l_{ij}\leqslant\rho_{ij}}[\nu_i(n_i-P_{l_{ij}}^{ij})+\nu_j(n_j-q_{l_{ij}}^{ij}+1)]$，　$i,j\in\underline{N}$，对任意循环Γ，

$$\sum_{i,j}[\nu_i(n_i-p_{l_{ij}}^{ij})-\nu_j(n_j-q_{l_{ij}}^{ij}+1)]=\sum_{i,j}[-\nu_ip_{l_{ij}}^{ij}+\nu_j(q_{l_{ij}}^{ij}-1)].$$

因此，在定理假设下，可选$\delta>1$，使W的所有顺序主子式皆大于零，从而存在$\overline{D}$，使$W^T\overline{D}+\overline{D}W$正定，故$Q$中第一项正定，至此，定理证毕。

三、相互关联的观测器与分散控制

对第i个子系统，设计观测器

$$\dot{\hat{x}}_i=(A_{ii}-G_iA)\hat{x}_i+G_iy_i+\sum_{j\neq i}A_{ij}\hat{x}_j+B_iu_i, \tag{5}$$

问题是选择G_i，使 $\lim\limits_{t\to\infty}(\hat{x}_i - x_i) = 0$。

分散控制规律为

$$u_i = U_i y_i + V_i \hat{x}_i, \quad i \in \underline{N}. \tag{6}$$

令
$$e_i = \hat{x}_i - x_i, \quad i \in \underline{N},$$
则有
$$\dot{e}_i = (A_{ii} - G_i C_i) e_i + \sum_{j \ne i} A_{ij} e_j,$$

$$\dot{x}_i = (A_{ii} + B_i(U_i C_i + V_i)) x_i + \sum_{j \ne i} A_{ij} x_j + B_i V_i e_i.$$

因此有

定理 4 系统（1）存在观测器（5）的充要条件为（A^T, C^T）可局部镇定；存在观测器（5）与分散控制（6）使闭环系统稳定的充要条件为（A, B）与（A^T, C^T）均可局部镇定。

由此定理及第二节中讨论，我们可以立即得到一些更为细致的条件，如

定理 5 设对任意$i \in \underline{N}$，或$A_{ij} = B_i F_{ij} C_j$对所有$j < i$成立，或$A_{ji} = B_j F_{ji} C_i$对所有$j < i$成立，则系统（1）存在观测器（5）与分散控制（6）使闭环系统稳定的充要条件为对任意$i \in \underline{N}$，（A_{ii}, B_i）可镇定，（A_{ii}, C_i）可检测。

参 考 文 献

〔1〕 Sezer, M.E. and Huseyin, O., Stabilization of Linear Time-invariant Interconnected Systems Using Local State Feedback, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 8:10, (1978), 751-756.

〔2〕 Ikeda, M., etc., Optimality of Decentra lized Control for Large Scale Systems, Automatica, 19:3, (1983), 209-316.

〔3〕 Patel, R.N., Munro, N., Multivariable Systems Theory and Design, Peryamon Press, Oxford, (1982).

〔4〕（日）须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，北京，(1979).

On Decentralized Control and State Estimation of Linear Time-invariant Large Scale Systems

Yu Runyi, Gao Weibing

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

This paper gives a necessary and sufficient condition for a class of large scale systems to be stabilized by local state feedback. For a wide class of systems which can be stabilized by using local state feedback, we prove that it can be arbitrarily assigned convergent rate. A necessary and sufficient condition for large scale systems to exist decentralized observer and control is obtained. All proofs in the paper are constructive.