第6卷 增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

一种广义系统补偿器的设计方法

王跃云　施颂椒　张钟俊

（上海交通大学自动控制系）

摘　要

本文介绍一种广义系统补偿器的设计方法．该补偿器既能消除系统的脉冲响应，又能配置闭环广义系统的极点．

一、引　言

给定由广义状态方程描述的系统

$$E\dot{x}=Ax+Bu,\qquad y=Cx。\tag{1}$$

式中E、A、B、C分别为$r\times r$，$r\times r$，$r\times m$，$l\times r$维实数阵，E是奇异的．设行列式$\det(sE-A)\neq 0$。记多项式$\det(sE-A)$的阶次为n和$\alpha=\mathrm{rank}E$，则$n\leqslant\alpha$，且系统（1）的内部具有n个指数模和$\alpha-n$个脉冲模[1]，它们分别对应于自由运动$x(t)$中的指数项和脉冲项．

根据〔1〕，如果系统（1）的指数模和脉冲模都是可控的（或都是可观的），则(1)被称之为强可控的（或强可观的）．对于一个强可控的广义系统，用状态反馈可以消除它的脉冲模，并任意配置系统的闭环极点．然而，在实际应用中，有相当一部分系统的状态是不能直接得到的．因此，本文着重给出了一种广义系统输出补偿器的设计方法．有关广义系统补偿器的另一种设计方法，可参阅文〔3〕．

二、补偿器设计

全文假定系统（1）强可控强可观．从而它必须满足下列判据

判据 1　系统（1）的指数模都是可控的充要条件为

$$\mathrm{rank}[sE-A\quad B]=r\quad \forall\text{有限的复数 } s\tag{2}$$

判据 2[1]　对$[sE-A\quad B]$进行实数的列初等变换，将它变为$[sE_1-A_1\quad A_2\quad B]$，$E_1$列满秩．则$\alpha-n$个脉冲模可控的充要条件为

$$[E_1\quad A_2\quad B]\text{行满秩}\tag{3}$$

根据对偶原理，也可以得到类似于（2）（3）的可观判据．

因为$\mathrm{rank}E=\alpha<r$，不失一般性，假定（E、A、B、C）具有下述形式

本文于1986年4月4日收到．1987年8月13日收到修改稿．

$$(E、A、B、C)=\left(\begin{bmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}[C_1 \quad C_2]\right), \tag{4}$$

否则，总可以用初等变换（PEQ，PAQ，PB，CQ），其中P、Q非异，将它们变成标准型（4）. 同理，我们将系统（1）重新写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u, \\ 0&=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u, \\ y&=C_1x_1+C_2x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

在（5）中，若A_{22}非奇异，则广义系统没有脉冲模. 相反，若A_{22}奇异，系统（1）将具有$a-n$个脉冲模[1]. 以下专门考虑$\det A_{22}=0$的情况.

1．输出反馈对脉冲模的影响　因为（1）强可控强可观，根据脉冲模可控判据2以及对偶的可观判据应有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} & B_2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & B_2 \end{bmatrix}=r,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21} & A_{22} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{22} \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}=r, \tag{6}$$

即$[A_{22} \quad B_2]$行满秩，$[A_{22}' \quad C_2']'$列满秩. 这些满秩条件表明，A_{22}的零特征值都是子系统（A_{22}，B_2，C_2）的可控可观极点. 因此，用静态输出反馈，可以消除A_{22}的零特征值.

引理1　若$[A_{22} \quad B_2]$行满秩，$[A_{22}' \quad C_2']'$列满秩，则存在一矩阵F，使得$0\notin\sigma(A_{22}+B_2FC_2)$.

证　因为$\det A_{22}=0$，记$\rho=\operatorname{rank}A_{22}$，则一定存在非奇异阵$T$、$V$，使得

$$(TA_{22}V,TB_2,C_2V)=\left(\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},[H_1 \quad H_2]\right). \tag{7}$$

根据上式我们有

$$T(A_{22}+B_2FC_2)V=\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} G_1FH_1 & G_1FH_2 \\ G_2FH_1 & G_2FH_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

此外，由初等变换关系（7）可知

$$\operatorname{rank}[A_{22} \quad B_2]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_\rho & 0 & G_1 \\ 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

由于$[A_{22} \quad B_2]$行满秩和$[A_{22}' \quad C_2']'$列满秩，因此G_2应行满秩，H_2应列满秩. 于是$(G_2G_2')^{-1}$和$(H_2'H_2)^{-1}$存在. 取$F=G_2'(G_2G_2')^{-1}(H_2'H_2)^{-1}H_2'$代入（8）

$$T(A_{22}+B_2FC_2)V=\begin{bmatrix} I_\rho+G_1G_2'(G_2G_2')^{-1}(H_2'H_2)^{-1}H_2'H_1 & G_1G_2'(G_2G_2')^{-1} \\ (H_2'H_2)^{-1}H_2'H_1 & I \end{bmatrix}. \tag{10}$$

(10) 的右边是一分块阵. 利用求分块阵行列式的方法得

$$\det\{T(A_{22}+B_2FC_2)V\}=\det(I_\rho+G_1G_2'(G_2G_2')^{-1}(H_2'H_2)^{-1}H_2'H_1-G_1G_2'$$

$\cdot(G_2G_2')^{-1}(H_2'H_2)^{-1}H_2'H_1)=1$. 所以 $\det(A_{22}+B_2FC_2)=1/\det(TV)\neq0$. 证毕.

现将 $u=Fy+v$ 代入 (5), 得到反馈系统.

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=\hat{A}_{11}x_1+\hat{A}_{12}x_2+B_1v\\ 0&=\hat{A}_{21}x_1+\hat{A}_{22}x_2+B_2v\end{aligned}\right\}, \tag{11a}$$

$$y=C_1x_1+C_2x_2, \tag{11b}$$

式中 $\hat{A}_{11}=A_{11}+B_1FC_1$, $\hat{A}_{12}=A_{12}+B_1FC_2$, $\hat{A}_{21}=A_{21}+B_2FC_1$, $\hat{A}_{22}=A_{22}+B_2FC_2$. 根据引理1, $\hat{A}_{22}$ 是非奇异的. 从而系统 (11) 不再具有脉冲模. 并且输出反馈不会影响系统的可控可观性.

2. 极点配置　为了将广义系统分解成一个动态子系统和一个静态子系统, 令 $z=[z_1'\ z_2']'$, 且

$$M=\begin{bmatrix} I & -\hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{A}_{22}^{-1}\hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

将 $x=Nz$ 代入 (11), 并于 (11a) 的两边左乘以 M 得

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}_1&=A_0z_1+B_0v\\ 0&=z_2+B_2v\end{aligned}\right\}, \tag{13a}$$

$$y=C_0z_1+D_0v, \tag{13b}$$

式中 $A_0=\hat{A}_{11}-\hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}\hat{A}_{21}$, $B_0=B_1-\hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}B_2$, $C_0=C_1-C_2\hat{A}_{22}^{-1}\hat{A}_{21}$,

$D_0=-C_2\hat{A}_{22}^{-1}B_2$. 上述变换不会改变系统的结构特性. 于是, 由可控判据1和对偶的可观判据又有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A_0 & 0 & B_0 \\ 0 & -I & B_2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A_0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}=r,\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A_0 & 0 \\ 0 & I \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=r, \tag{14}$$

即子系统 (A_0, B_0, C_0) 能控能观, 原来的 $\alpha-n$ 个脉冲模被输出反馈配置成了可控可

观的指数模，现包含在$\sigma(A_0)$中。

因为（A_0，B_0）可控，可用反馈控制$v=Kz_1$代入（13），配置期望的闭环极点$\sigma(A_0+B_0K)$。

3．偿补器设计 由于状态z_1不能直接得到，只能从（13a）确定部分状态z_2，但不能由（13b）唯一地确定z_1。然而，我们可按如下方法构造观测器，来观测系统的状态z_1。

$$\dot{\hat{z}}_1=(A_0+LC_0)\hat{z}_1+(B_0+LD_0)v-Ly。\tag{15}$$

而观测误差满足方程

$$\frac{d}{dt}(z_1-\hat{z}_1)=(A_0+LC_0)(z_1-\hat{z}_1)。\tag{16}$$

因为（A_0，C_0）能观，可以配置稳定的极点$\sigma(A_0+LC_0)$。最后，将$v=K\hat{z}_1$代入(13)，则它和观测器（15）构成的闭环系统是

$$\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_0 & B_0K & 0 \\ -LC_0 & A_0+LC_0+B_0K & 0 \\ 0 & B_2K & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \hat{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix}。\tag{17}$$

此外，可以验证如下的相似变换关系成立。

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 & B_0K \\ -LC_0 & A_0+LC_0+B_0K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0+B_0K & B_0K \\ 0 & A_0+LC_0 \end{bmatrix}。\tag{18}$$

相似关系（18）表明，闭环系统的极点等于（A_0+B_0K）和（A_0+LC_0）的全体特征值。因此，可以分离设计控制器K和观测器的增益L。

将$v=K\hat{z}_1$代入（15）得到补偿器如下。

$$\dot{\hat{z}}_1=(A_0+B_0K+LC_0+LD_0K)\hat{z}_1-Ly,\quad u=K\hat{z}_1+Fy。\tag{19}$$

三、结 论

在强可控强可观的假设下，本文提出了一种广义系统补偿器的设计方法，它可以用一个a阶的状态方程来实现。这种补偿器不仅能消除广义系统的脉冲模，而且能任意配置闭环系统的极点。

参 考 文 献

〔1〕 Verghese, G. C., Levy, B. C., Kailath, T., A generalized state-space for singular systems, IEEE Trans. AC-26: 4(1981), 811-831.

〔2〕 Rosenbrock, H. H., Structural properties of linear dynamic systems Int. J. Control, Vol. 20: 2, (1974), 191-202.

〔3〕 王朝珠、戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，3:1，(1986)，2-12.

〔4〕 Kailath, T., Linear Systems, Englewood Cliffs, NJ; Prentice-Hall, (1980).

An Approach of Compensator Design of Generalized Systems

Wang Yueyun, Shi Songjiao, Zhang Zhongjun

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University)

Abstract

This paper presents a method of compensator design of generalized systems. The compensator can not only eliminate impulsive motions, but also arbitrarily assign the poles of the closed-loop generalized systems.