第6卷 增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

大统系稳定性的一种新的分析方法

黄力民
（湘潭矿业学院基础部）

摘　要

本文首次将部分变元稳定性理论应用于解决大系统的稳定性问题，改进了文献[2、6]的方法，得到更大的稳定性参数区域.

考虑常系数线性系统：

$$\dot{x} = Ax,\ A\in R^{n\times n},\ x\in R^{n\times 1} \tag{1}$$

将变元分为 r 组($r<n$)，记为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \tag{2}$$

式中，$x_i = \mathrm{col}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)})$，$A_{ij}$ 是$n_i\times n_j$ 阶实常数矩阵($i,j=1,2,\cdots,r$；$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$)。

设对于每一组变元x_i，孤立子系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & A_{22} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \tag{3}$$

之零解渐近稳定，研究在什么条件下大系统（2）之零解也是渐近稳定，这是大系统理论中的一个重要课题。对于一般的非线性时变系统，文[1]利用各子系统的Lyapunov 函数构造辅助系统，用辅助系统的稳定性去确定原系统的稳定性。文献[2]对于系统（2）的结果是：对每个子系统按 Barbashin 公式作正定二次型函数

$$v_i(x_i) = \frac{1}{2}x_i^T C^{(i)} x_i,$$

使全导数 $\dot{v}_i(x_i)\big|_{(3)} = -\|x_i\|_2^2$，又存在 $A_1^{(i)}$，$A_2^{(i)}>0$，使 $A_1^{(i)}\|x_i\|_2^2 \leqslant v_i(x_i) \leqslant A_2^{(i)}\|x_i\|_2^2$。由此作出辅助系统是：

本文于1986年10月31日收到。1987年2月19日收到修改稿。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2A_2^{(1)}} & \dfrac{L_{12}}{A_1^{(2)}} & \cdots & \dfrac{L_{1r}}{A_1^{(r)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{L_{r1}}{A_1^{(1)}} & \dfrac{L_{r2}}{A_1^{(2)}} & \cdots & -\dfrac{1}{2A_2^{(r)}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

式中，$L_{ij} = \dfrac{n-n_i}{2}\max\{\|\alpha_1^{(ij)}\|_2^2, \|\alpha_2^{(ij)}\|_2^2, \cdots \|\alpha_{n_j}^{(ij)}\|_2^2\}\ (i,j=1,2\cdots,r,i\neq j)$.

$$\tag{5}$$

$\alpha_1^{(ij)}, \alpha_2^{(ij)}, \cdots, \alpha_{n_j}^{(ij)}$是矩阵$B^{(ij)} \overset{\text{def}}{=\!=\!=} C^{(i)}A_{ij}$的列向量.

由系统（4）的渐近稳定可推出原系统（2）的渐近稳定性. 系统（4）之系数矩阵的特征方程系数所满足的Hurwitz条件即（2）之稳定性参数区域. 这种用低阶的系统来确定高阶系统的稳定性的方法在实用上将是方便的，已被许多文献如[4,5]等用来解决一些类型方程的稳定性问题.

一般地由辅助系统的稳定性得到原系统的稳定性区域将小于直接从原系统得到的稳定性区域. 本文首先给出一个例子，当辅助系统不可能渐近稳定时，原系统却是渐近稳定的，这时利用部分变元稳定性的某些结论来扩大稳定性区域，然后给出一般的结论.

考虑以下四阶系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & c_1 & c_2 \\ k_{21} & k_{22} & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & -k_1 & a_1 \\ b_3 & b_4 & a_2 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

取$n_1=2$，$n_2=n_3=1$. 设k_1、$k_2>0$，$k_{11}+k_{22}<0$，$k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}>0$.

由文献[1，2]作出辅助系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2A_2^{(1)}} & 2k_1(B_{13}^2+B_{23}^2) & 2k_2(B_{14}^2+B_{24}^2) \\ \dfrac{3B_1^2}{2k_1^2 A_1^{(1)}} & -k_1 & \dfrac{3k_2a_1^2}{k_1^2} \\ \dfrac{3B_2^2}{2k_2^2 A_1^{(1)}} & \dfrac{3k_1a_2^2}{k_2^2} & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix}, \tag{7}$$

式中　B_{13}，B_{23}，B_{14}，B_{24}，B_1，B_2的表达从略

系统（6）的稳定性区域Γ是系统（7）的系数矩阵的特征方程系数满足Hurwitz条

件，由此必有$|a_1a_2|<\frac{k_1k_2}{3}$.

此时有$k_1k_2-a_2a_2>3|a_1a_2|-a_1a_2\geqslant 0$，即系统（6）中子系统$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1 & a_1\\a_2 & -k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$之零解渐近稳定。

以上表明当$|a_1a_2|\geqslant\frac{k_1k_2}{3}$时参数区域$\Gamma$是空集。我们用以下方法将条件$|a_1a_2|<=\frac{k_1k_2}{3}$放宽为$a_1a_2<k_1k_2$，得到一个包含$\Gamma$的参数区域。

由文献[3]定理之推论2，当$a_1a_2<k_1k_2$时，若系统（6）中变元x_1，x_2渐近稳定，则系统（6）必是全变元渐近稳定；而当系统（7）中变元v_1^*渐近稳定时，系统（6）之变元x_1，x_2渐近稳定，于是得到系统（6）的稳定性区域$\overline{\Gamma}$是：$a_1a_2<k_1k_2$，系统(7)对一个变元v_1^*渐近稳定。由不等式$|a_1a_2|<\frac{k_1k_2}{3}\Rightarrow a_1a_2<k_1k_2$之包含关系可知$\overline{\Gamma}$包含$\Gamma$。例如取$c_i=0(i=1,2,3,4)$，（7）中$2k_1(B_{13}^2+B_{23}^2)=2k_2(B_{14}^2+B_{24}^2)=0$，又设$|a_1a_2|\geqslant\frac{k_1k_2}{3}$，则系统（7）不是全变元渐近稳定，由$\Gamma$得不到系统（6）的渐近稳定。而系统（7）对一个变元v_1^*渐近稳定，由$\overline{\Gamma}$仍可得系统（6）的渐近稳定性。

在一般情形下我们有：

定理 1　若辅助系统（4）渐近稳定，则由系统（2）中变量组$x_1,x_2,\cdots,x_r$的若干个组成的孤立子系统都是渐近稳定的。

证　由系统（4）之系数矩阵的特点及M矩阵理论[7]，当系统（4）渐近稳定时，其系数矩阵的任一主子阵也是稳定的。例如

$$D^*=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2A_2^{(k)}} & \frac{L_{k,k+1}}{A_1^{(k+1)}} & \cdots & \frac{L_{kr}}{A_1^{(r)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{L_{rk}}{A_1^{(k)}} & \frac{L_{r,k+1}}{A_1^{(k+1)}} & \cdots & -\frac{1}{2A_2^{(r)}}\end{bmatrix}$$

是稳定的。

下证由此可推出系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_k\\x_{k+1}\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{kk} & A_{k,k+1} & \cdots & A_{kr}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{rk} & A_{r,k+1} & \cdots & A_{rr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k\\x_{k+1}\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}\tag{8}$$

之零解渐近稳定。

作出（8）的辅助系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_k^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2A_2^{(k)}} & \dfrac{\overline{L}_{k,k+1}}{A_1^{(k+1)}} & \cdots & \dfrac{\overline{L}_{kr}}{A_1^{(r)}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\overline{L}_{rk}}{A_1^{(k)}} & \dfrac{\overline{L}_{r,k+1}}{A_1^{(k+1)}} & \cdots & -\dfrac{1}{2A_2^{(r)}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_k^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix}, \tag{9}$$

式中 $\overline{L}_{ij} = \dfrac{(n_k+\cdots+n_r)-n_i}{2}\max\{\|\alpha_1^{(ij)}\|_2^2,\cdots,\|\alpha_{n_j}^{(ij)}\|_2^2\}$

$$(i,j=k,k+1,\cdots,r,i\neq j) \tag{10}$$

由（5）、（10）式有 $L_{ij}\leqslant\overline{L}_{ij}$ $(i,j=k,k+1,\cdots,r,i\neq j)$ 而得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_k^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2A_2^{(k)}} & \dfrac{L_{k,k+1}}{A_1^{(k+1)}} & \cdots & \dfrac{L_{kr}}{A_1^{(r)}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{L_{rk}}{A_1^{(k)}} & \dfrac{L_{r,k+1}}{A_1^{(k+1)}} & \cdots & -\dfrac{1}{2A_2^{(r)}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_k^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix}.$$

由于矩阵D^*稳定，由Bailey之定理（参见〔2〕）系统（9）渐近稳定，因而得证系统（8）渐近稳定。

定理 2 若系统（8）渐近稳定，则当辅助系统（4）对变元 v_1^* $v_2^*,\cdots,v_{k-1}^*$ 渐近稳定时，原系统（2）渐近稳定。

如前所述，这是文献〔1,2,3〕有关结论的直接结果。

记Γ是辅助系统（4）满足Hurwitz条件的参数集合，$\overline{\Gamma}$是孤立子系统(8)渐近稳定，辅助系统（4）对变元$v_1^*,v_2^*,\cdots,v_{k-1}^*$渐近稳定的参数集合，则由文献〔1，2〕及定理2，$\Gamma$、$\overline{\Gamma}$都是系统（2）的稳定性参数区域。

定理 3 参数区域$\overline{\Gamma}$包含Γ。

证 若参数满足Γ，即辅助系统（4）渐近稳定，从而对部分变元$v_1^*,\cdots,v_{k-1}^*$渐近稳定，又定理1已证此时子系统（8）渐近稳定，故参数必满足$\overline{\Gamma}$。反之若子系统(8)渐近稳定，则其辅助系统（9）不一定渐近稳定，即D^*不一定是稳定的（特别，当系统（9）不是渐近稳定时，D^*一定不是稳定的），因而辅助系统（4）可能不是渐近稳定，$\overline{\Gamma}$确是大于Γ的参数区域。

文献〔6〕也推广了文献〔2〕的结论，文献〔6〕对于系统（2）所得辅助系统如（4），

但其中系数

$$L_{ij}=\frac{n-n_i}{2n_j}\sum_{l=1}^{n_j}\|\alpha_l^{(ij)}\|_2^2.$$

当然按文献〔6〕对于系统（8）所得辅助系统应如（9）所示，但其中系数为

$$\overline{L}_{ij}=\frac{(n_k+\cdots+n_r)-n_i}{2n_j}\sum_{l=1}^{n_j}\|\alpha_l^{(ij)}\|_2^2.$$

此时不等式$\overline{L}_{ij}\leqslant L_{ij}$仍成立，即本文定理对于文献〔6〕都成立．于是在文献〔6〕的基础上应用本文结论可得到比文献〔6〕更大的稳定性参数区域．

本文方法可概述如下：

若大系统（2）满足条件1）孤立子系统（3）之零解渐近稳定；2）系统（2）的关于s个变量组$x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_s}$ $(l_1,\cdots,l_s\in\{1,2,\cdots,r\}$，$2\leqslant s<r)$的孤立子系统之零解渐近稳定（即块矩阵$(A_{ij})$，的某个$s$阶主子阵是稳定的）；则大系统（2）之零解渐近稳定的充分条件是：辅助系统（4）之零解对于$(r-s)$个变元$v_\mu^*(\mu\in\{1,2,\cdots,r\}-\{l_1,\cdots,l_s\})$渐近稳定．

对于文〔2,6〕的方法，以上条件2）是必要的．

参考文献

〔1〕 Bailey, F. N., The Application of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems, J. SIAM, Control Ser.A. 3, (1965), 443-462.

〔2〕 秦元勋等，运动稳定性理论与应用，科学出版社，北京，（1981），173-190.

〔3〕 黄力民，常系数线性系统部分变元稳定性的判别，科学通报，29:8,（1984），511.

〔4〕 徐道义，一类时变系统的稳定性，西南师范学院学报（自），1,（1984），55-61.

〔5〕 张泽绵，多台电机大系统参数稳定域的扩大，华南工学院学报，12: 2,（1984），91-107.

〔6〕 辜建德，一类线性时变大系统的运动稳定性，控制理论与应用，2:2,（1985），108-113.

〔7〕 Šiljak, D. D., Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland, New York,（1978），394-403.

A New Method for Determining the Stability of Large-Scale Systems

Huang Limin

(Department of Basic Science, Xiangtan Mining Institute)

Abstract

In this paper the theory on the partial stability is applied to the stability analysis of large-scale systems, the analysis method of stability in paper 〔2, 6〕 is improved and larger parametric domain of stability is obtained.