第6卷 增刊2　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 2
1989年4月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　April, 1989

受限正控制系统的可控性

赵克友

（青岛大学自控系）

摘　要

本文提出当控制不仅只能取正值且在幅值上还要受限时线性多变量离散时间系统的零可控性、可达性及完全可控性的一些结果.

一、引　言

考虑由差分方程

$$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k,\quad k=0,\ 1,\ \cdots \tag{1}$$

所描述的线性系统，其中状态 $x_k\in R^n$，控制 $u_k\in\Omega\subset R^m$，而 A 与 B 各是相应维数的常数矩阵。称控制序列$\{u_i\}$是允许的，如果 $u_i\in\Omega$，$i=0$，1，…. 当 $\Omega=R^m$ 时，系统（1）的状态可控性问题已由Kalman提出并解决；当 Ω 是 R^m 中以原点为中心的超立方体时，文[1]给出了系统（1）可控性的结论；对单输入情况，即 $m=1$ 且 $\Omega=[0,\ \infty)$ 时，文[2]提出了可控性判据。本文将在此基础上讨论当 Ω 为 R^m 中以原点为顶点的第一卦限中的超立方体时，系统（1）的可控性。所提控制约束是有应用背景的，例如愈来愈引起人们极大兴趣的经济、管理、生态、医药等领域中的控制只能取有限正值。

首先给出有关的可控性定义.

定义 1　称系统（1）在约束控制下是 ρ 可控的，如果通过适当地选取有限长度的允许控制序列$\{u_i\in\Omega\}$，可将任意的初态转移到固定的状态 ρ；特别，若 $\rho=0$，则称是零可控的.

定义 2　称系统（1）在约束控制下是可达的，如果通过适当地选取有限长度的允许控制序列$\{u_i\in\Omega\}$，可将零初态转移到任意事先指定的终端状态.

定义 3　称系统（1）在约束控制下是完全可控的，如果通过适当地选取有限长度的允许序列$\{u_i\in\Omega\}$，可以实现任意两个状态之间的转移.

为方便起见，各分量不小于0的控制向量 $u\in R^m$ 及各分量只能取值于区间$[0,\ 2a]$的控制向量 $u\in R^m$ 分别记为

$$\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{u}\leqslant 2\boldsymbol{a}, \tag{2'}$$

其中，$\boldsymbol{0}=[0\quad 0\cdots 0]'\in R^m$，$\boldsymbol{a}=[a\quad a\cdots a]'\in R^m$，而 $2a>0$ 是由实际问题所规定的最大允许控制幅值.

本文于1986年3月10日收到．1987年6月25日收到修改稿．

本文欲解决以下问题：

问题1　系统（1）在约束（2′）下的零可控性问题。

问题2　系统（1）在约束）2′）下的可达性问题。

问题3　系统（1）在约束（2′）下的完全可控性问题。

无控制约束并且 A 阵可逆时，系统（1）的零可控性、可达性及完全可控性是互相等价的；然而当有控制约束时，正如下文所看到的，这三者便是不同的了。

二、问题的转化及预备引理

若 A 阵无特征值1，在系统（1）和约束（2′）下

$$p=(A-I)^{-1}Ba \tag{3}$$

是 R^n 中一个确定的向量。定义下述平移变换

$$x_k=y_k-p, \tag{4a}$$

$$u_k=a-v_k, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \tag{4b}$$

易证系统（1）经变换（4）变为与之等价的系统

$$y_{k+1}=Ay_k+Bv_k, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \tag{5}$$

而对新的控制向量 v_k 的约束就变为

$$-a\leqslant v_k\leqslant a, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \tag{6}$$

问题1也就等价地转化为

问题 1a　系统（5）在约束（6）下的 p 可控性。

下面将提出三个有用的引理，其中引理1显而易见，余者给予证明。

引理 1　若系统（5）在约束（6）下既是零可控的，又是自零到 $p=(A-1)^{-1}Ba$ 可达的，则它是 p 可控的。

引理 2　若矩阵 A 无正实特征值，则存在一个正整数 r 及 $\alpha_i\in[0,\ 1]$，使下式成立

$$(I-A)^{-1}=\alpha_0I+\alpha_1A+\cdots+\alpha_{r-1}A^{r-1}. \tag{7}$$

证　不失一般性，设矩阵 A 已是 Jordan 型

$$A=\begin{bmatrix} J_0 & 0\\ 0 & J_1\end{bmatrix},$$

其中，J_0 是 $n_1\times n_1$ 零特征值子块，J_1 是 $(n-n_1)\times(n-n_1)$ 非零特征值子块，由假设它不含正实特征值。文[2]说，对这样的 J_1 必存在一个系数严格正的零化多项式 $\omega_1(\lambda)$。令 $\omega(\lambda)=\lambda^{n_1}\omega_1(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda+\cdots+\beta_r\lambda^r$，其中，$\beta_r>0$，$\beta_i\geqslant0$，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1$。由于

$$\omega(A)=A^{n_1}\omega_1(A)=\begin{bmatrix} J_0^{n_1} & 0\\ 0 & J_1^{n_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1(J_0) & 0\\ 0 & \omega_1(J_1)\end{bmatrix},$$

故　$$\beta_0I+\beta_1A+\cdots+\beta_rA^r=0.$$

再令　$$\alpha_i=\frac{\beta_{i+1}+\beta_{i+2}+\cdots+\beta_r}{\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_r},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1.$$

显然，$\alpha_i \in [0, 1]$，至于（7）的正确性可用（$I-A$)左乘其两边后将 α_i 表达式直接代入来验证之。

引理 3　若系统（1）在约束（2）下是零可控的，则矩阵 A 必无代数重度与几何重度相等的正实特征值。

证　用反证法。不失一般性，设（1）已是 Jordan 型

$$A=\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix},$$

其中，$J_1=\lambda_1 I_{n_1}$，$\lambda_1>0$。考察子系统

$$x_{k+1}^{(1)}=J_1 x_k^{(1)}+B_1 u_k \tag{8}$$

在控制约束（2）下的零可控状态集 $X_c^{(1)}$：

$$x_c^{(1)} \triangleq \bigcup_{k=0}^{\infty}\{x^{(1)}:\ x^{(1)}=J_1^{-1}B_1u_0+J_2^{-1}B_1u_1+\cdots+J_1^{-k}B_1u_{k-1},\ \forall u_i\geqslant 0\}.$$

若令 $\Lambda=\{u:\ u\in R^m,\ u\geqslant 0\}$，矩阵 B_1 视为 $R^m\to R^{n_1}$ 的变换，$B_1(\Lambda)$表示 Λ 在 B_1 下的象集，于是

$$X_c^{(1)}=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{\lambda_1^{-1}B_1(\Lambda)+\lambda_1^{-2}B_1(\Lambda)+\cdots+\lambda_1^{-k}B_1(\Lambda)\}.$$

Λ 是 R^m 中第一卦限所成的真錐，它在 B_1 下的象 $B_1(\Lambda)$也是 R^{n_1} 中的一个真錐[3]。由于 $\lambda_1>0$，因而有 $X_c^{(1)}\subset B_1(\Lambda)$。这说明子系统（8）在约束（2）下不是零可控的，当然整个系统（1）在约束（2）下也不是零可控的了。

三、零可控性

本节给出零可控性的一些结论，用到下述条件：

$(c1)$：$\mathrm{Range}A^n \subset \mathrm{Range}[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B]$，

$(c2)$：A 的每一特征值 λ 都满足 $|\lambda|\leqslant 1$，

$(c3)$：A 无正实特征值，

$(c4)$：A 无代数重度与几何重度相等的正实特征值。

定理 1　（充分条件）　若系统（1）同时满足$(c.1)$—$(c.3)$，则它在约束（2）′下是零可控的。

证　条件（$c.1$）与（$c.2$）保证了系统（5）在约束（6）下是零可控的[1,4]，若条件$(c.3)$再能保证它是自零到 p 是可达的，由引理1，它必是 p 可控的。再由问题 1 与 1a 的等价性，证明便可完成。

事实上，由引理2，（$c.3$）意味（7）式成立。用 Ba 右乘（7）式两边利用（3）式即有

$$-p=\alpha_0 Ba+\alpha_1 ABa+\cdots+\alpha_{r-1}A^{r-1}Ba.$$

上式正说明控制序列$\{v_i=-\alpha_{r-1-i}a\}_{i=0}^{i=r-1}$可使系统（5）的零初态转移到状态$p$。

定理 2 （必要条件） 若系统（1）在约束（2）′下是零可控的，则它必满足条件(c.1)，(c.2)及（c.4)。

证 系统（1）在约束（2）′下是零可控的，在约束$-2a\leqslant u_k\leqslant 2a$，$k=0,1,\cdots$下更应是零可控的，因此（c.1）与（c.2）必成立[1,4]。系统（1）在约束（2）′下是零可控的，在约束（2）下当然也是，由引理3，条件（c.4）必成立。

四、可 达 性

称系统$x_{k+1}=A^{-1}x_k-A^{-1}Bu_k$是系统（1）的反系统。系统与其反系统之间有对偶关系[4]。

对偶原理 系统（1）在某控制约束下是可达的，当且仅当其反系统在同一约束下是零可控的。

注意到矩阵A与A^{-1}特征值互为倒数，即有

定理 3 （充分条件） 若系统（1）同时满足（c.3）及

(c.5)：$\mathrm{rank}[B, AB, \cdots, A^{n-1}B]=n$，

(c.6)：A的每一特征值λ都满足$|\lambda|\geqslant 1$，

则它在约束（2）′下是可达的。

定理 4 （必要条件） 若系统（1）在约束（2）′下是可达的，则它必满足条件(c.4)—(c.6)。

五、完全可控性及附记

系统（1）在约束（2）′下是完全可控的，当且仅当它是零可控的又是可达的[4]。将问题1与2所求得的结论结合在一起，便得到问题3的解答。

定理 5 系统（1）在约束（2）′下是完全可控的，当且仅当1）$\mathrm{rank}[B, AB, \cdots, A^{n-1}B]=n$，2）$A$的每一特征值$\lambda$都满足$|\lambda|=1$，且$\lambda\neq 1$。

$m=1$即单输入情况下，可以证明，定理1与定理3的条件是充分必要的；对于多输入情况，作者猜想它们很可能也是充分必要的，但这需作进一步的研究。

零点作为控制值域顶点的问题已由本文解决，零点是外点的情况也是值得研究的问题，例如，控制约束$\mathbf{a}\leqslant u\leqslant \mathbf{b}$，其中$\mathbf{a}=[a, a\cdots, a]'$，$\mathbf{b}=[b, b, \cdots, b]'$，且$b>a>0$，系统（1）的可控性如何？

参 考 文 献

〔1〕 Zhao Keyou, Chen Zhaokuan, Cheng Zhaolin, Complete Controllability for Linear Constant Systems with Several Control Constraints, In Proc.

1984IFAC Congr., V, (1984), 7—11.

〔2〕 Evans, M. E., Murthy, D. N. P., Controllability of Discrete-time Systems with Positive Controls, IEEE Trans. Automat. Contr., 22: 6, (1977), 942—945.

〔3〕 关肇直、张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科技出版社，(1979)，199—200.

〔4〕 赵克友，具有控制约束的离散时间系统的可控性、可达性与强可连性，控制理论与应用，2:4，(1985)，100—106.

Controllability of Positive Constrained Control Systems

Zhao Keyou

(Department of Automatic Control, Qingdao University)

Abstract

This paper presents some results on the null-controllability, reachability and complete controllability of linear multivariable discrete-time systems when controls are not only positive, but constrained on magnitudes as well.