最优简化模型的能控性

邵 剑 王茂华

（浙江大学数学系，杭州）

摘 要

在高阶模型完全能控的条件下，本文给出其最优简化模型也是完全能控的结论。

一、引 言

在大系统理论中，可以用不同的方法把一个高阶模型简化为一个低阶模型，并在某种意义下达到最优。研究其最优简化模型的能控性问题无疑具有重要的意义。

考虑高阶定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中，

$$u(t) = \begin{cases} u(t)v, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \tag{2}$$

$x(t) \in R^n$，$y(t) \in R^m$，$u(t) \in R^1$，而 $v \in R^p$ 是实常向量；A，B，C 是相应阶数的实常数矩阵。本文讨论的模型最优简化问题是求出它的最优简化模型

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \quad x_r(0) = 0, \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + N_r u(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中，$x_r(t) \in R^r$，$y_r(t) \in R^m$，$m \leq r < n$；N_r 是作用于输入 $u(t)$ 的线性微分算子，A_r，B_r，C_r 是相应阶数的实常数矩阵。同时使得性能指标

$$J = \int_0^\infty (y - y_r)^T Q (y - y_r) dt \tag{4}$$

在给定输入时达到最小，这里的 Q 是正定加权矩阵。

文[1]—[5]证明了在各种函数 $u(t)$ 输入时高阶模型（1）、（2）在上述意义下的最优简化问题都可以归结为在脉冲函数输入时相应瞬态部分的最优简化。即考察模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G_1(A) G_2^{-1}(A) Bv\delta(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{5}$$

的最优简化，式中的 G_1、G_2 是 A 的矩阵多项式，它是随系统（1）的输入函数 $u(t)$ 不同而

本文于1986年6月10日收到，1987年9月29日收到修改稿。

有不同的形式．设系统（5）可以由文〔6〕的算法得到它的最优简化模型

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + G_1(A_r)G_2^{-1}(A_r)B_r v\delta(t), \\ y_r(t) = C_r x_r(t). \end{cases} \tag{5'}$$

该算法保证每步迭代得到的矩阵对（A_r，$G_1(A_r)G_2^{-1}(A_r)B_r$）都是完全能控的，从而最终保证最优简化模型（5′）是完全能控的。但是对各类函数 $u(t)$ 输入时的高阶模型（1）的能控性与其有相同输出的系统（5）的能控性的关系尚未讨论；同样，简化模型（5′）的能控性与其有相同输出的高阶模型（1）的最优简化模型（3）的能控性的充要关系也没有涉及．也就是说，原高阶模型（1）的最优简化模型的能控性尚需研究，它正是本文提出的能控性问题的由来．本文证明，在高阶模型（1）、（2）完全能控的条件下，其得到的最优简化模型（3）也完全能控．

二、引　理

本文以大写字母表示矩阵，而以同一字母的小写表示其元素．如 $n\times p$ 阶实矩阵 B、G的元素分别以 b_{ij}，g_{ij} 表示．显然有如下引理1．

引理 1　若 H 是 $n\times n$ 阶可逆的实上三角矩阵，则矩阵

$$R = HB$$

的元素 r_{nk} 不为零的充要条件是 $n\times p$ 阶实矩阵 B 的元素 b_{nk} 不为零．

引理 2　设 n 阶若当块矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$Q_1 = [B \vdots JB \vdots J^2B \vdots \cdots \vdots J^{n-1}B]$$

满秩，$\mathrm{rank}Q_1 = n$，的充要条件是存在一个 k，$1\leqslant k\leqslant p$，使得矩阵 B 的元素 $b_{n_k} \neq 0$．

容易由〔7〕的引理3.11.1推得本引理．

引理 3　若 H 是 $n\times n$ 阶可逆的上三角实矩阵，J 是 $n\times n$ 阶若当块矩阵，记 $n\times np$ 阶矩阵

$$Q_2 = [R \vdots JR \vdots J^2R \vdots \cdots \vdots J^{n-1}R],$$

其中，$R = HB$．则矩阵 Q_1 满秩当且仅当矩阵 Q_2 满秩．

由引理1和引理2即得本结论．

现在考虑 $n\times n$ 阶实矩阵 A．令 M 是把 A 变换为若当型矩阵 J 的变换矩阵，即 $MAM^{-1} = J$，其中

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix},\ J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k. \tag{6}$$

引理 4 设 $G(A)$、$G_1(A)$、$G_2(A)$是 A 的矩阵多项式，则有如下结论：

1）$G(A)=M^{-1}G(J)M$；

2）$G^{-1}(A)=M^{-1}G^{-1}(J)M$；

3）$G_1(A)G_2^{-1}(A)=M^{-1}G_1(J)G_2^{-1}(J)M$，

$G_1^{-1}(A)G_2(A)=M^{-1}G_1^{-1}(J)G_2(J)M$。

这个结论是显然的。

三、最优简化模型的能控性

本节讨论高阶线性系统（1）、（2）的最优简化模型的能控性问题。

文中称两个系统是等价的，如果该两个系统具有相同的输出。下面证明，一定常线性系统是完全能控的当且仅当其等价系统也是完全能控的。这是论证最优简化模型完全能控性的关键。

文[4]已证明，在不同函数输入时系统（1）都有其相应的等价系统。设线性系统（1）、（2）的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)=A\boldsymbol{\zeta}(t)+G_1(A)G_2^{-1}(A)Bv\delta(t),\ \boldsymbol{\zeta}(0)=\mathbf{0}, \\ z(t)=C\boldsymbol{\zeta}(t)+CN\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{7}$$

其中，G_1、G_2 是 A 的矩阵多项式，且非奇异，N 是作用于 $\boldsymbol{u}(t)$的线性微分算子。注意，G_1、G_2 和 N 是随输入（2）的 $u(t)$不同而异。

定理 1 高阶线性系统（1）、（2）完全能控的充分必要条件是其等价系统（7）完全能控。

证 设矩阵 A 的特征值 λ，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，的相应重数为 l_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，且 $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i=n$。若矩阵 M 把 A 变换为若当型矩阵 J，即 $A=M^{-1}JM$，其中 J 如式（6）所示。则系统（1）、（2）的能控性判别矩阵

$$\begin{aligned} Q_c&=[B \vdots M^{-1}JMB \vdots M^{-1}J^2MB \vdots \cdots \vdots M^{-1}J^{n-1}MB] \\ &=M^{-1}[MB \vdots JMB \vdots J^2MB \vdots \cdots \vdots J^{n-1}MB]. \end{aligned}$$

记 $\widetilde{B}=MB$。现把 $n\times p$ 阶矩阵 $\widetilde{B}$ 分成 k 块，$\widetilde{B}_1$，$\widetilde{B}_2$，$\cdots$，$\widetilde{B}_k$，它们的行数与相应的若当块 J_1，J_2，$\cdots$，J_k 的阶数 l_1，l_2，$\cdots$，l_k 相一致，而列数都是 p。即

$$\widetilde{B}=(\widetilde{B}_1^T,\ \widetilde{B}_2^T,\ \cdots,\ \widetilde{B}_k^T)^T.$$

那么

$$Q_c = M^{-1}(Q_1^T,\ Q_2^T,\ \cdots,\ Q_k^T)^T,$$

其中，

$$Q_i = [\widetilde{B}_i \vdots J_i\widetilde{B}_i \vdots J_i^2\widetilde{B}_i \vdots \cdots \vdots J_i^{n-1}\widetilde{B}_i],\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

由此可见，$\mathrm{rank}Q_c = n$ 当且仅当 $\mathrm{rank}Q_i = l_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$。

另一方面，由引理 4 可知系统（7）的能控性判别矩阵

$$\hat{Q}_c = [G_1(A)G_2^{-1}(A)B \vdots AG_1(A)G_2^{-1}(A)B \vdots A^2G_1(A)G_2^{-1}(A)B \vdots \cdots$$

$$\vdots A^{n-1}G_1(A)G_2^{-1}(A)B] = M^{-1}(\hat{Q}_1^T,\ \hat{Q}_2^T,\ \cdots,\ \hat{Q}_k^T)^T,$$

其中，

$$\hat{Q}_i = [G_1(J_i)G_2^{-1}(J_i)\widetilde{B}_i \vdots J_iG_1(J_i)G_2^{-1}(J_i)\widetilde{B}_i \vdots \cdots \vdots J_i^{n-1}G_1(J_i)G_2^{-1}(J_i)\widetilde{B}_i],$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

同样可得，$\mathrm{rank}\hat{Q}_c = n$，当且仅当 $\mathrm{rank}\hat{Q}_i = l_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$。

由引理3可知 $\mathrm{rank}Q_i = l_i$ 当且仅当 $\mathrm{rank}\hat{Q}_i = l_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots k$。进而推得，系统（1）、（2）的能控性判别矩阵 Q_c 满秩当且仅当系统（7）的能控性判别矩阵 $\hat{Q}_c$ 满秩。证毕。

由文[6]可以得到等价系统（7）的瞬时状态部分的最优简化模型，在该简化模型中加上（7）的稳定状态部分，经整理后根据等价性就可得到系统（1）、（2）的最优简化模型（3）。

定理 2 若高阶线性系统（1）、（2）是完全能控的，则其得到的最优简化模型（3）也是完全能控的。

由定理1容易证得这个结论。

例 对突加正弦输入函数

$$u(t) = \begin{cases} \mathbf{v}\sin\omega t, & t \geqslant 0, \\ \mathbf{0}, & t < 0, \end{cases}$$

而言，系统（1）完全能控当且仅当其等价系统[3]

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) = A\boldsymbol{\zeta}(t) + \omega(A^2+\omega^2E)^{-1}B\mathbf{v}\delta(t),\ \boldsymbol{\zeta}(0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{z}(t) = C\boldsymbol{\zeta}(t) - CA(A^2+\omega^2E)^{-1}B\mathbf{v}\sin\omega t - \omega C(A^2+\omega^2E)^{-1}B\mathbf{v}\cos\omega t, \end{cases}$$

完全能控，从而它的最优简化模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) = A_r\mathbf{x}_r(t) + B_r\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}_r(t) = C_r\mathbf{x}_r(t) + [C_rA_r(A_r^2+\omega^2E)^{-1}B_r - CA(A^2+\omega^2E)^{-1}B]\mathbf{v}\sin\omega t \end{cases}$$

$$+\ \omega[C_r(A_r^2+\omega^2E)^{-1}B_r - C(A^2+\omega^2E)^{-1}B]\mathbf{v}\cos\omega t$$

也完全能控。

对于多输入-多输出系统的最优简化模型的能控性问题也有类似的结果，在此不再赘述。

参考文献

〔1〕 Wilson, D. A., Optimun Solution of Model-Reduction Problem, Proc IEE, 117, (1970), 1161—1165.

〔2〕 Wilson, D. A. and Mishra, R. N., Optimal Reduction of Multivariable System, Int. J. Control, 29 (1979), 267—278.

〔3〕 张钟俊、白尔维，正弦函数输入时高阶模型的最优简化，控制理论与应用，1:1 (1984), 79—86.

〔4〕 邵剑，高阶模型最优简化的积分平方误差法的若干性质，控制理论与应用，3:2 (1986), 72—79.

〔5〕 邵剑，多输入-多输出系统的模型简化，自动化学报，12:2 (1986), 190—193.

〔6〕 Mishra, R. N., and Wilson, D. A. A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivarible System, Int. J. Control, 31, (1980), 443—466.

〔7〕 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，北京，(1984).

Controllability of the Optimal Reduced Order Model

Shao Jian, Wang Maohua

(Department of Mathematics, Zhejiang University)

Abstract

In this paper, the conclusion is given below. If a higher order model is completely controllable, then its optimal reduced order model is also completely controllable.