具有固定闭环极点的同时稳定*

肖 建
(西南交通大学电气工程系，四川峨眉)

摘要 本文讨论了具有固定闭环极点的同时稳定问题，给出了该问题有解的充要条件和控制器的计算方法.

关键词: 极点配置；稳定性；鲁棒控制

1. 引 言

同时稳定问题为：设计一单一的控制器 C，以稳定线性被控对象族$\{AP_i, i\in n\}$中的每一个P_i，其中 n 表示不大于 n 的正整数集合. 它是一类鲁棒控制问题. P_i 可看成是非线性系统在不同工作点附近线性化而得到的不同的线性模型，也可看成是由于系统部件失效或工作环境变化而引起系统结构的变化所对应的不同模型.

自文献[1]首次研究这一问题以来，该问题近年来得到了广泛的研究. 然而迄今尚未得到一计算控制器 C 的较好的方法. 文献[2]采用状态方程方法，通过求系统左逆来求解 C，但计算仍然十分复杂. 文献[3]讨论了各P_i 均为单输入单输出系统时，该问题的一类解法，它可使得每一闭环系统具有固定的极点.

本文广泛地讨论了具有固定闭环极点的同时稳定问题. 对多输入单输出系统，给出了该问题有解的充要条件，对多输入多输出系统，则给出了它的几乎总是有解的条件. 在有解的情况下，可通过求一零空间的最小阶次基和解一刁番都方程来求得 C. 最后，用一实例说明了 C 的计算方法.

本文中我们采用了"某性质几乎总是成立"这样的术语，它是描述特定意义下通有性的另一类等价提法，关于它的详细定义请见文献[4].

2. 主要结果

本文为简单起见，均不明显标出拉氏算子 s，如记 $P(s)$为 P. 用 $\partial(\cdot)$表示多项式或多项式矢量的阶次；$\partial_{c_i}(\cdot)(\partial_{r_i}(\cdot))$表示多项式矩阵的第 i 列(行)列(行)次.

考虑图 1 所示的单位反馈系统. 其中 C 为待设计的控制器，(X, Y) 为它的不可约右 MFD；P 为被控对象，其相应于不同工作点，分别由 P_i，$i\in n$ 描述，设(D_i, N_i)为 P_i 的不可约左 MFD；u 为 m 维输入；y 为 r 维输出.

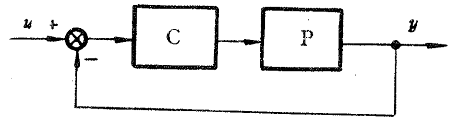

图 1 单位反馈系统

* 本文于 1988 年 2 月 1 日收到. 1989 年 10 月 13 日收到修改稿.

本文所考虑的问题可正式描述为:

问题 1 设计传函为真的控制器 $C=YX^{-1}$，使得，相应于各 P_i，闭环分母矩阵 (D_iX+N_iY) 均为 Φ，其中 Φ 为任意指定 .

显然，问题 1 等价于求方程组

$$D_1X+N_1Y=\Phi, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} D_1-D_2 & N_1-N_2 \\ D_1-D_3 & N_1-N_3 \\ \cdots & \cdots \\ D_1-D_n & N_1-N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

的使得 YX^{-1} 为真的解 . 不失一般性，设 (2) 式左边的系数矩阵为行满秩 . 采用行变换，使得该矩阵为行既约，记所得之行既约阵为〔$\overline{D}$，$\overline{N}$〕，令〔$\overline{D}_h$，$\overline{N}_h$〕为其行次系数矩阵 .

首先讨论 m 输入单输出系统，这时 Φ 为标量，即指定的特征多项式; D_i 与 X 为标量; N_i 与 Y 分别为行、列矢量; $\overline{D}$ 为 $(n-1)$ 维列矢量; $\overline{N}$ 为 $(n-1)\times m$ 维阵 . 设〔A'，B'〕$'$ 为〔$\overline{D}$，$\overline{N}$〕的右零空间最小阶次基[5]，其中 A 为 q 维列矢量，B 为 $m\times q$ 维阵，$q:=m-n+2$，记它的列次系数矩阵为〔A'_h，B'_h〕$'$. 令

$$W:=D_1A+N_1B. \tag{3}$$

定理 1 设 P_i，$i\in\underline{n}$ 均为 m 输入单输出系统，则对阶次充分高的任意特征多项式 Φ 问题 1 有解的充要条件为:

1) $n\leqslant m$，2) $\overline{N}_h$ 为行满秩，3) W 中各元素互质 .

证 由于$\overline{N}_h$行满秩，A_h中元素不全为零，不失一般性，设A_h第一分量不为零. 记

$$v_1:=\partial_{c_1}〔A'，B'〕'，\ v:=\max_i \partial_{c_i}〔A'，B'〕'，\ k:=v-v_1.$$

方程 (2) 的解可表成

$$X=AT, \qquad Y=BT, \tag{4}$$

其中 T 为任意 q 维多项式矢量 . (4) 式代入方程 (1)，并注意到 (3) 式，有

$$WT=\Phi. \tag{5}$$

写成分量形式

$$W_1T_1+W_2T_2+\cdots+W_qT_q=\Phi, \tag{6}$$

其中 W_i，T_i 分别为 W 与 T 的第 i 分量 . 因 W 中各元素互质，对任意 Φ，刁番都方程 (6) 恒有解，解出 T 后代入 (4) 式，即得方程组 (1)、(2) 的解 . 下面仅需在方程 (6) 的解集中找出使得 $C=YX^{-1}$ 为真的解 .

求出 W_1^{-1}〔W_2，…，W_q〕的不可约右 MFD FG^{-1}，G 为列既约，其最大列次为 v_g. 用多项式除法，可在 (6) 式解集合中求得满足

$$\partial T_i \leqslant v_g - 1 \qquad i \geqslant 2 \tag{7}$$

的最小阶次解，若取

$$\partial \Phi \geqslant \partial D_1 + v + v_g, \tag{8}$$

则由 (6) 式知有 $\partial \Phi = \partial(W_1 T_1)$. 因 $\partial W_1 \leqslant \partial D_1 + v_1$，从而有

$$\partial T_1 \geqslant v_g + k. \tag{9}$$

注意到 $\partial_{c_1} B \leqslant v_1$，可得出

$$\partial X = \partial(AT) \geqslant v + v_g \geqslant \partial(BT) = \partial Y. \tag{10}$$

即 $C = YX^{-1}$ 为真．

下证必要性，条件 1 若不成立，则方程 (2) 无非零解，或者方程 (6) 不是对任意 Φ 均有解，从而条件 1 为必要．另方面，条件 2 是 A_h 不全为零的充要条件，若其不成立则 A_h 为零，由 (4) 式知，这时无论 T 取何值均不能使 C 为真．最后，条件 3 是方程 (6) 对任意 Φ 均有解的充要条件．

由定理1的证明中可归纳出控制器的计算方法：

1° 找出〔$\overline{D}$，$\overline{N}$〕的右零空间最小阶次基〔A'，B'〕$'$.

2° 解刁番都方程 (6)，得满足 (7) 式的特解．

3° 将上述解代入 (4) 式即得 $C = YX^{-1}$.

该算法的主要计算工作量为求最小阶次基和解刁番都方程，二者均有大量的计算方法可供选择.

对 m 输入单输出系统，若 $n>m$，则对任意 Φ，问题 1 无解. 但对某些特殊的 Φ，问题 1 的解有可能存在.

先考虑单输入单输出系统族 $\{P_i, \ i \in \underline{n}\}$，令

$$\begin{bmatrix} D_1 - D_2 & N_1 - N_2 \\ \cdots & \cdots \\ D_1 - D_n & N_1 - N_n \end{bmatrix} := [D, \ N], \tag{11}$$

它的各行按行次递升排列．

定理 2 单输入单输出系统族 $\{P_i, \ i \in \underline{n}\}$ 能被一传函为真的控制器实现具有固定闭环极点的同时稳定的充要条件为

1° rank〔D，N〕$=1$；

2° $\partial(N_2 - N_1) \geqslant \partial(D_1 - D_2)$；

3° $D_1 N_2 - D_2 N_1 = \Phi\alpha$；其中 α 为 $(N_2 - N_1)$ 与 $(D_2 - D_1)$ 的公因子，Φ 为固定特征多项式．

证 显然，相应于单输入单输出系统，条件 1 是方程 (2) 有解的充要条件．这时，方程 (2) 的通解为

$$X = \frac{1}{\alpha}(N_2 - N_1)R, \qquad Y = \frac{1}{\alpha}(D_1 - D_2)R, \tag{12}$$

其中 R 为任意多项式．从而条件 2 为 C 为真的充要条件．R 是控制器传函分子与分

母的公因子，为使控制器有最小维数，取 $R=1$，代入方程（1）得

$$D_1(N_2-N_1)+N_1(D_1-D_2)=\Phi\alpha. \tag{13}$$

即条件 3 为必要的．

定理 2 的结论比文献 [3] 中的相应结论更加简单明了．

对 m 输入单输出系统，当 $n>m$ 时也可得到相应的条件．设〔D，N〕仍由 (11) 式定义，显然，问题 1 有解的必要条件之一为 rank〔D，N〕$\leqslant m$，若 rank〔D，N〕$<m$，可利用定理 1，下面仅讨论〔D，N〕秩为 m 的情况．

定理 3 设 m 输入单输出系统族 $\{P_i,\ i\in\underline{n}\}$，$n>m$，且由 (11) 式定义的〔$D$，$N$〕秩为 m，〔$\overline{D}$，$\overline{N}$〕为由〔D，N〕经行变换而得的行既约阵，〔$\overline{D}_h$，$\overline{N}_h$〕为它的行次系数矩阵．〔A'，B'〕$'$ 为〔$\overline{D}$，$\overline{N}$〕的右零空间最小阶次基．问题 1 有解的充要条件为

1° rank $\overline{N}_h=m$,

2° $D_1A+N_1B=\Phi$.

证 可类似定理 1、2 的证明步骤给出其证明，从而略去．

以上我们虽然只考虑了 m 输入单输出系统情况下问题 1 的解．但是，对于单输入 r 输出系统，利用对偶原理，我们也可以得到与以上定理类似的对偶形式的结果．而对一般的 m 输入 r 输出的系统族 $\{P_i,\ i\in\underline{n}\}$，我们还可以利用文献〔5〕中所提供的方法，通过将各 P_i 左乘一常矢量，将它化成 m 输入单输出系统的同时稳定问题．因此，定理 1、3 对于多输入多输出系统的具有固定闭环极点的同时稳定问题也具有指导意义．

下面，我们考虑 m 输入 r 输出系统的具有固定闭环分母矩阵 Φ 的同时稳定问题．由文献〔5〕，它比以上要求各相应于系统族中模型 P_i 的闭环系统均具有固定极点更进一步．设〔$\overline{D}$，$\overline{N}$〕、〔$\overline{D}_h$、$\overline{N}_h$〕、〔A'，B'〕$'$ 和 W 等均类似前面定义，将 W 分块为〔W_1，W_2〕，其中 W_1 为 r 维方阵；W_2 为 $r\times(q-r)$ 维阵；$q:=m-(n-2)r$．令

$$\mu_i:=\partial_{r_i}W_1. \tag{14}$$

定理 4 对 m 输入 r 输出系统族 $\{P_i,\ i\in n\}$，其中 $nr\leqslant m$，若 $\overline{N}_h$ 为行满秩，并且任意指定的分母矩阵 Φ 满足

$$\Phi=H\Phi_-H_c, \tag{15}$$

其中 $H:=\mathrm{diag}\{s^{\mu_1},\ \cdots,\ s^{\mu_r}\}$；$H_c:=\mathrm{diag}\{s^{b_1},\ \cdots,\ s^{b_r}\}$；$\Phi_-$ 为双真，μ_i 由 (14) 式定义，b_i 为足够大．则几乎总是可以找到一传函为真的控制器，实现以 Φ 为固定分母矩阵的同时稳定．

证 设〔A'_h，B'_h〕为〔A'，B'〕$'$ 的列次系数矩阵，因为 $\overline{N}_h$ 为行满秩，A_h 的秩为 r．不失一般性，设 A_h 的前 r 列非奇异，其对应的列次最小者为 v_1．

令 $k:=\max_i \partial_{c_i}[A', B']'-v_1$.

方程(2)的通解为

$$X=AT, \qquad Y=BT, \tag{16}$$

其中 T 为任意 $q\times r$ 维多项式阵，代入方程 (1) 得

$$(D_1A+N_1B)T=\Phi. \tag{16}$$

将 T 按 W 相应分块为 $[T_1, T_2]$，则方程(16)可写成

$$W_1T_1+W_2T_2=\Phi. \tag{17}$$

因为对任意 A，B，几乎总有 W_1 与 W_2 左质．对任意 Φ，方程(17)几乎总是有解．下面仅需在其解集合中寻找使得 YX^{-1} 为真的解．

设 $M_2M_1^{-1}$ 为 $W_1^{-1}W_2$ 的不可约右 MFD，且 M_1 为列既约，其最大列次为 l. 用多项式除法，可在方程(17)中求得 $\max_i \partial_{c_i}T_2\leqslant l-1$ 的特解．由(17)式及(15)式，有

$$\left(H^{-1}W_1\right)\left(T_1H_c^{-1}\right)+H^{-1}W_2T_2H_c^{-1}=\Phi \tag{18}$$

选择 b_i，$i\in \underline{r}$，使得 $H^{-1}W_2T_2H_c^{-1}$ 为严格真，则在 (18) 式中，若令 $s\to\infty$，它左边第二项为零，右边为一有限的非奇异阵，左边第一项中因子 $H^{-1}W_1$ 为一有限阵，从而有

$$\partial_{c_i}T_1\geqslant b_i, \qquad i=1, \cdots, r \tag{19}$$

代入(16)式中，并根据 T_1 与 T_2 的不等式以及 A_h 前 r 列为非奇异，可得

$$\partial_{c_i}X\geqslant\partial_{c_i}Y. \tag{20}$$

通过对 X 的列次之和与其行列式阶次的比较，可知 X 几乎总是列既约，从而 C 几乎总是为真．

总之，问题1的实质为其解 X、Y 必须处于相应于各(D_i, N_i)之差的右零空间中，并且满足一刁番都方程．

3. 计算实例

$$P_1=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{s+63}{s^2-3s+2}\end{bmatrix}, \qquad P_2=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s^2+3s+60}{s^2-2s-3}\end{bmatrix}.$$

它们的不可约左 MFD 分别为

$$D_1=s^2-3s+2, \qquad N_1=[s-2 \quad s+63],$$

$$D_2=s^2-2s+3, \qquad N_2=[s-3 \quad s^2+3s+60],$$

算得：$[\overline{D}, \overline{N}]=[-s+5 \quad 1 \quad -s^2-2s+3]$.

它的右零空间最小阶次基为

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 32 & s-5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[W_1 \quad W_2] = [s^3 + 4s^2 - 52s + 15 \qquad 2s^2 - 10s + 12].$$

取 $\qquad \Phi = (s^2 + 2s + 2)\ (s+2)^3,$

可求得方程 (6) 的解为

$$T_1 = S^2 - \frac{1747}{78}s + \frac{1207}{39}, \qquad T_2 = \frac{2059}{156}s^2 - \frac{20953}{156}s - \frac{5827}{156}.$$

于是有

$$X = s^3 - \frac{343}{156}s^2 + \frac{441}{52}s + \frac{9323}{52},$$

$$Y = \left[\frac{2059}{156}s^3 + \frac{2833}{78}s^2 + \frac{608}{78}s - \frac{41787}{52} \quad -s^2 + \frac{1747}{78}s - \frac{1207}{39} \right]'.$$

所求控制器 $C = YX$

4. 结　束　语

本文采用多项式矩阵分式表示法，讨论了具有固定闭环极点的同时稳定问题. 分别给出了在多输入单输出系统情况下该问题有解的充要条件，和在多输入多输出系统情况下的几乎总是有解的条件.

与现有文献中关于同时稳定的结论相比，本文所提出的条件不但简洁明了，而且便于应用. 文中所提出的算法也比现有算法计算简便及规范化. 本文还揭示了具有固定闭环极点的同时稳定问题的实质在于控制器 C 的分母矩阵 X 与分子矩阵 Y 必须处于一相应于各(D_i, N_i)之差的右零空间和一刁番都方程解集合的交中，在满足了一定条件的前提下，可在该交中找出使得 C 为真的解. 本文大大地扩充了文献〔3〕的结论.

在现实的物理系统中，对非线性系统，我们往往是考虑它在几个工作点附近的线性化模型，而且，由于工作环境的变化引起各被控对象结构上变化的情况也时有发生，例如被控对象输入通道失效时引起系统结构上的变化等. 因此本文的结论具有重要意义.

参考文献

〔1〕 Vidyasagar,M., Viswanadham, N., Algebraic Design Techniques for Reliable Stabilization, IEEE Trans. Auto. Gontr., **AC-27**,5,(1982), 1085-1095.

〔2〕 Minto, K.D., Vidyasagar, M., A State Space Approach to Simultaneous Stabilization, Contr. Theory and Adv. Tech., **2**, 1, (1986),39-64.

〔3〕 Emre,E., Simultaneous Stabilization with Fixed Closed-loop Characteristic Polynomial, IEEE Trans. Auto. Contr., **AC-28**,1, (1983), 103-104.

〔4〕 Wonham,W.M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer-verlag, (1979), chapter O.

〔5〕 Chen, C.T., Linear System Theory and Design, Holt Reinhart and Winston, New York, (1984), 432-536.

Simultaneous Stabilization with Fixed Closed-loop Poles

Xiao Jian

(Department of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Sichuan Emei)

Abstract: Simultaneous stabilization with closed-loop poles is discussed in this paper. Necessary and sufficient conditions, as well as the controller design algorithms are given.

Key words: pole assignment; stability; robust control