第7卷 第1期
1990年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.1
Mar., 1990

噪声协方差的一种递推估计方法

栾恩连 邓自立
(哈尔滨经济技术社会发展研究中心) (黑龙江大学应用数学研究所, 哈尔滨)

摘要 基于白噪声平滑器, 本文提出了状态空间模型中噪声协方差的一种新的递推估计方法, 给出了一种次优无偏极大后验(MAP)递推噪声协方差估值器, 可应用于信号去卷[1]和 Kalman 滤波, 仿真例子说明了本文结果的有效性.

关键词: 信号去卷; Kalman滤波; 噪声统计估计; 白噪声估值器

1. 引 言

理论上 Kalman 滤波给出了状态的无偏最小方差估计, 但这在实际中很难实现. 原因是: 为了获得最优的状态估计, Kalman 滤波器需要噪声协方差的先验知识, 然而在许多场合下, 这些知识或者未知或者近似已知. 如果用不正确的噪声统计设计 Kalman 滤波器, 则应用时就可能导致状态估计具有不可接受的偏差, 甚至于导致滤波发散. 为此, 多年来有许多文献研究了未知噪声统计的 Kalman 滤波问题. 解决该问题的方法可分为两大类: 一类是直接辨识稳态最优滤波增益阵; 一类是估计噪声统计. 另一方面, 信号去卷 (deconvolution) 问题[1]可归结为求白噪声估值器问题, 但这也要求已知噪声协方差阵. 本文的目的就是要给出一种新的噪声协方差的递推估计方法, 同时也可解决自适应白噪声估计问题, 以两段互耦的递推算法联立实现了白噪声估值器及其协方差估值器.

2. 问题的解决

考虑动态系统

$$x_k = Ax_{k-1} + w_{k-1}, \tag{1}$$

$$z_k = Hx_k + v_k, \tag{2}$$

$$E(w_k) = 0;\ E\left(w_k w_j^T\right) = Q\delta_{kj},$$

$$E(v_k) = 0;\ E\left(v_k v_j^T\right) = R\delta_{kj},$$

其中 x_k 是 n 维状态向量, z_k 是 m 维观测向量, w_k 和 v_k 是独立的高斯白噪声, 矩阵 A 是非异的、稳定的, 协方差阵 Q, R 是未知的. E 是数学期望符号, T 是转置号. 现在的问题是基于观测数据估计 Q 和 R.

本文于 1988 年 5 月 18 日收到. 1989 年 6 月 24 日收到修改稿.

可以证明：基于观测数据$(z_1, \cdots, z_k)$，Q，R 的极大后验（MAP）估计为[2, 5]

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\hat{x}_{j|k} - A\hat{x}_{j-1|k})(\hat{x}_{j|k} - A\hat{x}_{j-1|k})^T = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\hat{w}_{j-1|k}\hat{w}_{j-1|k}^T, \tag{3}$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(z_j - H\hat{x}_{j|k})(z_j - H\hat{x}_{j|k} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\hat{v}_{j|k}\hat{v}_{j|k}^T, \tag{4}$$

其中 $\hat{x}_{j|k}$，$\hat{w}_{j|k}$，$\hat{v}_{j|k}^T$ 分别为基于观测$(z_1, \cdots, z_k)$对 x_j，w_j，v_j 的最优估值．而由 (1) 和 (2) 式有

$$z_k = H\left(I_n - q^{-1}A\right)^{-1}w_{k-1} + v_k, \tag{5}$$

这里 q^{-1} 是单位延迟算子．由 Fadeeva 求逆公式[6]

$$\left(I_n - q^{-1}A\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1}F_i q^{-i} \Big/ \sum_{i=0}^{n}a_i q^{-i}, \tag{6}$$

式中纯量系数 a_i 和矩阵 F_i 可递推计算为

$$a_k = -\frac{1}{k}\mathrm{tr}(AF_{k-1});\ a_0 = 1;\ k = 1, 2, \cdots, n;$$

$$F_k = AF_{k-1} + a_k I_n;\ F_0 = I_n;\ k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

式中 I_n 为 $n \times n$ 单位阵，tr 为矩阵的迹，我们有

$$A(q^{-1})z_k = C(q^{-1})w_{k-1} + A(q^{-1})v_k, \tag{7}$$

其中 $A(q^{-1})$，$C(q^{-1})$ 为多项式矩阵

$$A(q^{-1}) = I_m + a_1 I_m q^{-1} + \cdots + a_n I_m q^{-n};$$

$$C(q^{-1}) = C_0 + C_1 q^{-1} + \cdots + C_{n-1}q^{-(n-1)};\quad C_i = HF_i. \tag{8}$$

注意 (7) 式右端的两个滑动平均 (MA) 过程可用一个等价的 MA 过程表示为[3, 6]

$$u_k = C(q^{-1})w_{k-1} + A(q^{-1})v_k = D(q^{-1})e_k, \tag{9}$$

其中 $D(q^{-1}) = I_m + D_1 q^{-1} + \cdots + D_n q^{-n}$ 是稳定的，e_k 是零均值、协方差为 Q_e 的白噪声。于是有 ARMA 观测模型

$$A(q^{-1})z_k = D(q^{-1})e_k. \tag{10}$$

因为矩阵 A 是稳定的，易知 $\det A(q^{-1})$ 的零点在单位圆外，因而 $A(q^{-1})$ 是稳定的。从而 ARMA 过程 (10) 式是平稳可逆的。这引出 e_k 是 z_k 的新息过程，故称 (10) 式为观测过程 z_k 的 ARMA 新息模型。

(10)式中的 D_i 和 Q_e 可用 Gevers 和 Wouters 法计算[4]：

令 $R_{ue}(t,\ t-i)=R_u(i)-\sum\limits_{j=i+1}^{n}R_{ue}(t,\ t-j)R_e^{-1}(t-j,\ t-j)R_{ue}^T(t-i,\ t-j)$,

其中规定对 $j<0$，$R_{ue}(t,\ j)=O$，且

$$R_e(0,\ 0)=R_{ue}(0,\ 0)=R_u(0),$$

则有

$$Q_e=\lim_{t\to\infty}R_{ue}(t,\ t);\qquad D_i=\lim_{t\to\infty}R_{ue}(t,\ t-i)Q_e^{-1}.$$

上式中 $R_u(i)$ 是 u_k 是相关函数，注意到 $u_k=A(q^{-1})z_k$，其估值可代以采样协方差：

$$\hat{R}_u(i)=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}u_k u_{k-i}^T,\qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n.$$

周知，观测序列 $(z_t,\ z_{t-1},\ \cdots)$ 与新息序列 $(e_t,\ e_{t-1}\cdots)$ 含有同样的统计信息，它们生成同样的 Hilbert 空间，因此基于观测 $(z_t,\ z_{t-1}\cdots)$ 的 w_k 和 v_k 的稳态最优估值 $\hat{w}_{k|t}$ 和 $\hat{v}^{k|t}$ 分别是 w_k 和 v_k 在由 $(e_t,\ e_{t-1},\ \cdots)$ 所生成的 Hilbert 空间上的射影．由白噪声 e_k 的正交性和射影公式[6]可得

$$\hat{w}_{k|t}=\sum_{j=0}^{\infty}E\left(w_k e_{t-j}^T\right)Q_e^{-1}e_{t-j}, \tag{11}$$

$$\hat{v}_{k|t}=\sum_{j=0}^{\infty}E\left(v_k e_{t-j}^T\right)Q_e^{-1}e_{t-j}. \tag{12}$$

由(9)和(10)式，e_k 可分别表为

$$\begin{aligned}e_k&=D^{-1}(q^{-1})C(q^{-1})w_{k-1}\quad D^{-1}(q^{-1})A(q^{-1})v_k\\&=\sum_{j=0}^{\infty}S_j w_{k-1-j}+\sum_{j=0}^{\infty}G_j v_{k-j}\end{aligned} \tag{13}$$

和
$$e_k=D^{-1}(q^{-1})A(q^{-1})z_k=\sum_{j=0}^{\infty}G_j z_{k-j}. \tag{14}$$

其中系数阵 S_j 和 G_j 由如下恒等式得到：

$$C(q^{-1})=D(q^{-1})\left(S_0+S_1q^{-1}+\cdots\right),$$

$$A(q^{-1})=D(q^{-1})\left(G_0+G_1q^{-1}+\cdots\right).$$

比较恒等式两端 q^{-j} 的系数阵有递推公式：

$$S_j=-D_1S_{j-1}-\cdots-D_nS_{j-n}+C_j,$$

式中 $S_0=C_0=H$；$S_j=0$，对 $j<0$；$C_j=0$，对 $j>n-1$.

$$G_j=-D_1G_{j-1}-\cdots-D_nG_{j-n}+a_jI_m,$$

式中 $G_0=I_m$；$G_j=0$，对 $j<0$；$a_j=0$，对 $j>n$.

因 w_k 和 v_k 是独立的，把(13)式代入(11)和(12)式可推得如下最优固定滞后平滑器：

$$\hat{w}_{k|k+N}=\sum_{j=0}^{N-1}QS_j^TQ_e^{-1}e_{k+1-j} \tag{15}$$

和

$$\hat{v}_{k|k+N}=\sum_{j=0}^{N}RG_j^TQ_e^{-1}e_{k+j}, \tag{16}$$

式中 N 是固定滞后．把(15)和(16)式代入(3)和(4)式可得 Q，R 的次优估值器：

$$\hat{Q}_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\hat{w}_{j-1|j-1+N}\hat{w}_{j-1|j-1+N}^T, \tag{17}$$

$$\hat{R}_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\hat{v}_{j|j+N}\hat{v}_{j|j+N}^T. \tag{18}$$

但此估值器是有偏的．事实上，

$$E(\hat{Q}_k)=Qq_NQ;\qquad E(\hat{R}_k)=Rr_NR, \tag{19}$$

其中 E 是数学期望号，且

$$q_N=\sum_{j=0}^{N-1}S_j^TQ_e^{-1}S_j;\qquad r_N=\sum_{j=0}^{N}G_j^TQ_e^{-1}G_j. \tag{20}$$

这引出如下次优无偏 MAP 估值器：

$$\hat{Q}_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\hat{w}_{j-1|j-1+N}\hat{w}_{j-1|j-1+N}^T-OE\right), \tag{21}$$

$$\hat{R}_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\hat{v}_{j|j+N}\hat{v}_{j|j+N}^T-RE\right), \tag{22}$$

其中 QE 和 RE 分别为

$$QE=Qq_NQ-Q;\qquad RE=Rr_NR-R. \tag{23}$$

易知估值器(21)和(22)式是无偏的：

$$E(\hat{Q}_k)=Q;\qquad E(R_k)=R. \tag{24}$$

置 QE 和 RE 的估值分别为

$$QE_k=\hat{Q}_{k-1}q_N\hat{Q}_{k-1}-\hat{Q}_{k-1},\qquad RE_k=\hat{R}_{k-1}r_N\hat{R}_{k-1}-\hat{R}_{k-1}, \tag{25}$$

并在(21)和(22)式中以 QE_k 和 RE_k 分别近似代替 QE 和 RE，可得如下次优无偏递推 MAP 估值器：

$$\hat{Q}_k=\left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{Q}_{k-1}+\frac{1}{k}\left(\hat{w}_{k-1|k-1+N}\hat{w}_{k-1|k-1+N}^T-QE_k\right), \tag{26}$$

$$\hat{R}_k=\left(1-\frac{1}{k}\right)\hat{R}_{k-1}+\frac{1}{k}\left(\hat{v}_{k|k+N}\hat{v}_{k|k+N}^T-RE_k\right), \tag{27}$$

其初值为 $\hat{Q}_0=Q_0$，$\hat{R}_0=R_0$．

容易看出，基于 Gevers 和 Wouters 算法，在参数阵 G_j，S_j，Q_e，q_N 和 r_N 被确定之后，只要把 Q 和 R 的最新估值代入(15)和(16)式，便可交替地使用估值器(26)和(27)式与(15)和(16)式来递推求得 Q 和 R 的估值以及白噪声估值．应指出，如果

用递推增广最小二乘法[6]或其他方法在线辨识 ARMA 新息模型 (10) 式，则可在线计算估值$\hat{G}_j$，$\hat{S}_j$，$\hat{Q}_e$，$\hat{q}_N$，$\hat{r}_N$，$\hat{e}_k$，从而可得到自适应 Q，R 递推估值器和相应的自适应白噪声平滑估值器．

3. 数值仿真例子

例 1 考虑纯量系统[2]

$$x_{k+1}=0.9x_k+w_k, \tag{28}$$

$$z_k=x_k+v_k \quad , \tag{29}$$

其中 $x_0=1$，$Q=7$，$R=5$．取初值$\hat{Q}_0=10$，$\hat{R}_0=10$，分别用本文算法和 Sage 和 Husa[5] 算法递推第 400 步的 Q，R 的估值如表 1 所示，其中还列出了应用本文算法时不同滞后 N 对估值精度的影响．可看到本文算法和精度明显高于 Sage 和 Husa 算法的精度．还可看到本文算法随着固定滞后 N 的增加，估值精度有所改进，理论上也应如此．但 N 取较大时将增加计算量，且精度改进并不明显．因此在应用中通常取固定滞后 $N=3\sim5$ 时即可满足精度的要求．

表 1 例 1 的仿真结果

协方差真值	Sage 算法估值	本文算法的估值(对不同固定滞后 N)					
		$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
$Q=7$	7.963	6.216	6.235	6.673	6.812	6.864	6.833
$R=5$	3.807	4.377	4.675	4.497	4.446	4.440	4.452

参 考 文 献

〔1〕 Mendel,J.M., Minimum–Variance Deconvolution, IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing, **19**,3, (1981), 161–171.

〔2〕 Soeda,T., Yoshimura,T., Tabuchi, T., A Suboptimal Identification of Noise Covariances in Discrete Time Linear Systems, Int. J. Control, **27**,3, (1978).

〔3〕 Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Time Series Analysis, Holden–Day, San Francisco,(1970).

〔4〕 Gevers, M., Wouters, W.R.E., An Innovation Approach to the Stochastic Realization Problem, Journal A, **19**, 2, (1978).

〔5〕 Sage, A.P., Husa, G.W., Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics, JACC, (1969), 769–776.

〔6〕 邓自立、郭一新，动态系统分析及其应用，辽宁科学技术出版社，沈阳，(1985)．

A Recursive Estimation Approach to Noise Covariances

Luan Enlian

(Harbin Economic, Technical and Social Development and Research Centre)

Deng Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin)

Abstract: Based on white noise estimators, this paper presents a new recursive estimation approach to the noise covariances in the state-space model. Suboptimal unbiased maximum a posteriori (MAP) recursive estimators of noise covariances are given, which can be applied to signal deconvolution and Kalman filtering. Simulation example shows usefulness of proposed result.

Key words: signal deconvolution; Kalman filtering; noise statistics estimators; white noise estimators

(上接第 74 页)

43. Measurement and Control (计量与控制), 1968–, 双月刊, 英国计量与控制学会主办, 刊载学会的会议论文, 内容有计量与自动控制仪器的设计, 应用方面的理论与技术.

44. Messen–Steuern–Regeln(测量–控制–调节), 1958–, 月刊, 民主德国 VEB 出版社出版, 刊载自动控制方面的论文.

45. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics (莫斯科大学计算数学与控制论), 1977–, 季刊, 是苏联期刊《莫斯科大学通报》第 15 辑的英译本, 刊载研究论文与简讯.

46. Numerical Functional Analysis and Optimization (数值函数分析与最优化), 1979–, 双月刊, 美国 Marcer Dekker 出版社出版, 刊载数值分析、近似法、最优化和控制论等领域的研究与应用方面的论文.

47. Optimal Control Applications and Methods (最优控制应用与方法), 1980–, 季刊, 由设在英国的 Wiley 分公司出版, 刊载理论与应用文章, 兼载评论及简讯等, 内容有最优控制在结构工程、工业流程、医药剂量分析等方面的应用.

48. Optimization (最优化), 1970–, 双月刊, 民主德国科学出版社出版, 刊载线性规划和运筹学方面的理论与应用研究论文、评论、会议文献及书评等, 内容有线性、非线性、随机、参数、离散及动态规划, 控制论、对策论等.

49. Problems of Control and Information Theory (控制与信息理论问题), 1971–, 双月刊, 匈牙利科学出版社出版, 刊载控制与信息的理论与应用方面的文章及书评.

50. RAIRO: Automatique Productique Informatique Industrille (法国自动化、信息与运筹学: 自动控制生产系统), 1977–, 双月刊, 法国经济与技术控制论协会编辑, 原刊名为 RAIRO: Automatique, 1985 年改为现名, 刊载有关自动化生产与自动控制系统的理论和技术方面的研究论文.

51. Robotics and Automation (机器人学与自动化), 1986–, 年出 3 期, 国际科学技术发展协会 (IASTED)编辑, 刊载有关机器人与自动化系统的理论、设计和应用方面的论文, 内容有模拟、设计、控制、传感器、视觉、图像处理等. (下转第 97 页)