第7卷 第1期
1990年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.1
Mar., 1990

一类无穷维半线性系统能控的充分必要条件

蔡秀楠

(中山大学数学系，广州)

摘要: 本文给出无穷维半线性系统能控的充分必要条件及其应用。

关键词: 能控性; 充分必要条件; 无穷维; 半线性

1. 引 言

目前有许多研究无穷维半线性系统能控的方法,如不动点方法、隐函数方法、D. L. Russell"能稳的能控性"方法及 J. Henry 和周鸿兴各具特色的研究工作等，但尚未获得能控的充要条件。本文把半线性系统嵌入到线性系统中，提出了一般抽象半线性系统能控的充分必要条件。

在自反的 Banach 空间 Z 上考虑如下的抽象半线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + N(x,u), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 A 是 X 上线性 C_0 半群 $S(t)$ 的生成子，控制空间 U 为另一自反的 Banach 空间，$u(\cdot)\in L^p(0,T;U)$，$1\leqslant p<+\infty$，$N(\cdot,\cdot)$ 是 $X\times U$ 到 X 上的单值非线性向量值函数，满足如下基本假设：

(a) 对任何 $x(\cdot)\in C(0,T;X)$，$u(\cdot)\in L^p(0,T;U)$，都有 $N(x(\cdot),\ U(\cdot))\in L^p(0,T;X)$。

(b) 对任何 $u(\cdot)\in L^p(0;T;U)$，(1.1) 有唯一 mild 解，

$$x(t;\ x_0,u) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\alpha)N(x(\alpha;\ x_0,u),u(\alpha))d\alpha. \tag{1.2}$$

引入(1.1)相应的线性系统

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + v, \\ y(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

则当 $v(\cdot)\in L^p(0,T;X)$，(1.3) 有唯一 mild 解 .

$$y(t;x_0,v) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\alpha)v(\alpha)d\alpha. \tag{1.4}$$

定义(1.2)、(1.4)在 T 时的能达集:

$$K_N(x_0) = \left\{x\in X:\ x = x(T;\ x_0,u), u\in L^p(0,T;\ U)\right\},$$

$$K(x_0) = \left\{x\in X:\ x = y(T;\ x_0,v), v\in L^p(0,T;\ X)\right\}.$$

定义映照:

本文于 1988 年 7 月 9 日收到。1989 年 8 月 25 日收到修改稿。

$$F:L^p(0,T;\ U)\to C(0,T;\ X),Fu=x(\cdot,x_0;\ u),$$

$$L:L^p(0,T;\ X)\to C(0,T;\ X),Lv=y(\cdot;\ x_0,v,)$$

$$\tilde{N}:\ C(0,T;\ X)xL^p(0,T;\ U)\to L^p(0,T;\ X),$$
$$\tilde{N}(x,u)(\cdot)=N(x(\cdot),\ u(\cdot)),$$

$$G:\ L^p(0,T;\ X)\to X,\ Gx=\int_0^T S(T-\alpha)x(\alpha)d\alpha.$$

记 $G^{-1}:X\to L^p(0,T,X)$ 为 G 的多值逆映照，且

$$V_T(x_0,x)=G^{-1}(x-S(T)x_0),$$

则 $V_T(x_0,x)=\{v(\cdot)\in L^P(0,T;\ X):x=y(T;\ x_0,v)\}$, 完全刻划了 (1.4) 的能控性。

对系统(1.2)的任何一条轨道$x(t;\ x_0,u)$。取$v(t)=N(x(t;\ x_0,u),u(t)),t\in[0,T]$,则$x(\cdot;x_0,u)=y(\cdot;\ x_0,v)$。

因此，(1.2) 的任何一条轨道是 (1.4) 的轨道，即可以把半线性系统 (1.2) 嵌入到线性系统 (1.4) 来考虑. 从能控性研究的角度看，(1.2) 的能达集必包含在 (1.4) 的能达集，即 $K_N(x_0)\subset K(x_0)$。反之，(1.4) 的能达状态 $x\in K(x_0)$，何时才有 $x\in K_N(x_0)$ 呢？记集合

$$Q_1(x_0)=\left\{\begin{array}{l}x\in K(x_0);\ 存在v\in V_T(x_0,x),u\in L^p(0,T,U),\\ \qquad 使得\tilde{N}(Fu,u)=v\end{array}\right\}$$

$$Q_2(x_0)=\left\{\begin{array}{l}x\in\overline{K(x_0)};\ 存在x_n\in K(x_0),v_n\in V_T(x_0,x_n),x_n\to x,\\ u_n\in L^p(0,T,U);\ 使得\|\tilde{N}(Fu_n,u_n)-v_n\|_{L^p(0,T;\ Z)}\to 0\end{array}\right\}$$

$$R_1(x_0)=\left\{\begin{array}{l}x\in K(x_0);\ 存在v\in V_T(x_0,x),u\in L^p(0,T;\ U),\\ \qquad 使得\tilde{N}(Lv,u)=v\end{array}\right\}$$

特别当 N 满足一致 Lip. 条件时，即存在非负常数 r_1，r_2，使得对任何 $x_i\in X$, $u_i\in U,i=1$，2，有

$$\|N(x_1,u_1)-N(x_2,u_2)\|_X\leqslant r_1\|x_1-x_2\|_X+r_2\|u_1-u_2\|_U. \tag{1.5}$$

记

$$R_2(x_0)=\left\{\begin{array}{l}x\in\overline{K(x_0)};\qquad 存在x_n\in K(x_0),v_n\in V_T(x_0,x_n),\\ x_n\to x\quad 及u_n\in L^p(0,T;\ U),使得\\ \qquad\|\tilde{N}(Lv_n,u_n)-v_n\|_{L^p(0,T;\ X)}\to 0.\end{array}\right\}$$

下面给出文章的主要结果。

定理 1 (1) $K_N(x_0)=Q_1(x_0)$, 即 $x\in K_N(x_0)\rightleftharpoons x\in K(x_0)$, 且存在 $v(\cdot)\in V_T(x_0,x)$ 满足$\tilde{N}(Fu,u)=Lv,u\in L^p(0,T;\ U)$.

(2) $\overline{K_N(x_0)}=Q_2(x_0)$, 即 $x\in\overline{K_N(x_0)}\rightleftharpoons x\in K(x_0)$，且存在控制列 $v_n\in V_T(x_0,x_n)$, $u_n\in L^p(0,T;\ U)$，其中 $x_n\to x$ 满足 $\|\tilde{N}(Fu_n,u_n)-v_n\|_{L^p(0,T;\ X)}\to 0$.

定理 2 $K_N(x_0)=R_1(x_0)$，即 $x\in K_N(x_0)\rightleftharpoons x\in K(x_0)$，且存在有效控制

$v\in V_T(x_0,x)$ 及 $u\in L^p(0,T;\ U)$ 使得

$$\tilde{N}(Lv,u)=v.$$

定理 3 若条件(1.5)成立，则$\overline{K_N(x_0)}=R_2(x_0)$，即 $R_2(x_0)$ 为(1.2)从 x_0 出发的近似能达集 .

2. 定理的证明及应用

定理 1 的证明

(1) $K_N(x_0)=Q_1(x_0)$

$\because x\in K_N(x_0)\rightleftharpoons$ 存在 $u\in L^p(0,T;\ U)$，使得

$$x=S(T)x_0+\int_0^T S(T-\alpha)N((Fu)(\alpha),\ u(\alpha))d\alpha,$$

$\rightleftharpoons x-S(T)x_0=G(\tilde{N}(Fu,u)),$

$\rightleftharpoons \tilde{N}(Fu,u)\in G^{-1}(x-S(T)x_0)=V_T(x_0,x),$

$\therefore$ $x\in K_N(x_0)\rightleftharpoons V_T(x_0,x)\neq\Phi$ (空)，即 $x\in K(x_0)$，且存在有效控制 $v\in V_T(x_0,x)$ 具有形式$\tilde{N}(Fu,u)=v$ 的控制 $v(\cdot)$，其中 $u\in L^p(0,T;U)$，由 $Q_1(x_0)$ 的定义，$K_N(x_0)=Q_1(x_0)$。

(2) $\overline{K_N(x_0)}=Q_2(x_0)$

$\because$ 对 $x\in\overline{K_N(x_0)}$，$\exists u_n\in L^p(0,T;U)$ 使得 $x(T;x_0,u_n)\to x$，取 $v_n=\tilde{N}(Fu_n,u_n)$，则 $x(\cdot;x_0,u_n)=y(\cdot;x_0,v_n)$，$v_n\in V_T(x_0,x_n),x_n=x(T;x_0,\ u_n)$.

$\therefore$ 由$Q_2(x_0)$的定义，$x\in Q_2(x_0)$，故$\overline{K_N(x_0)}\subset Q_2(x_0)$.

又对 $x\in Q_2(x_0)$，$\exists x_n\to x(n\to\infty)$，$x_n\in K(x_0)$，且存在 $v_n\in V_T(x_0,\ x_n)$，$u_n\in L^p(0,\ T;\ U)$ 使得，$\|\tilde{N}(Fu_n,\ u_n)-v_n\|_{L^p(0,\ T;\ X)}\to 0,$

$\therefore$ $x(t;\ x_0,\ u_n)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-\alpha)N(Fu_n)(\alpha),\ u_n(\alpha))d\alpha$

$y(t;\ x_0,\ v_n)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-\alpha)v_n(\alpha)d\alpha.$

$\therefore$ $\|x(t;\ x_0,u_n-y(t;\ x_0,v_n)\|\leqslant C\|\tilde{N}(Fu_n,u_n)-v_n\|_{L^p(0,\ T;\ X)}\to 0$

$\therefore$ $\|x(T;\ x_0,u_n)-x\|$

$\leqslant\|x(T;\ x_0,u_n-y(T;\ x_0,v_n)\|+\|y(T;\ x_0,v_n)-x\|\to 0,$

即 $x\in\overline{K_n(x_0)}$。因此$\overline{K_n(x_0)}\supset Q_2(x_0)$ 证毕 .

例 1 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+N(x,u)+Bu,\\ x(0)=x_0,\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $B\in L(U,X)$，且存在常数$K_b>0$，使得

$$\|u\|_U \in K_b \|Bu\|_X \quad u\in U, \tag{2.2}$$

并且非线性项 $N(\cdot,\ \cdot)$ 满足 (1.5).

因此，对任何 $u(\cdot)\in L^2(0,T;\ U)$,(2.1) 有唯一 mild 解,

$$x(t;\ x_0,\ u)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-\alpha)(N(x(\alpha;\ x_0,\ u),\ u(\alpha))+Bu(\alpha)d\alpha). \tag{2.3}$$

记 $M_T=\sup\|S(t)\|$, $M_1=M^T e^{M_T K_1 T}$,

记 F 为 (2.3) 的解映照，即 $Fu=x(\cdot,x_0,u)$, 则

$$\therefore\ \|Fu_1-Fu_2\|_{L^2(0,\ T;\ X)}\leqslant M_1T(\|B\|+r_2)\|u_1-u_2\|_{L^2(0,\ T;\ U)}. \tag{2.4}$$

定义 $\tilde{B}:L^2(0,T;\ U)\to L^2(0,T;\ X)$, $(\tilde{B}u)(t)=Bu(t)$,

$\tilde{N}':L^2(0,\ T;\ U)\to L^2(0,\ T;\ X)$, $\tilde{N}'(u)=\tilde{N}(Fu,\ u)$.

推论 1 如果$R(\tilde{N}')\subset R(\tilde{B})$, 且

$$2K_b^2\left[(M_1Tr_1(\|B\|+r_2))^2+r_2^2\right]<1, \tag{2.5}$$

则 $K_N(x_0)=K_B(x_0)$, 其中 $K_B(x_0)$ 为 (2.1) 相应线性系统 $(N=0)$ 的能达集。

证 对$x\in K_N(x_0)$,$\exists\, u\in L^2(0,T,U)$ s.t.

$x(T,x_0,u)=x$, 取$v=\tilde{N}'(u)+\tilde{B}u$, 则$v(\cdot)\in R(\tilde{N}')+R(\tilde{B})\subset R(\tilde{B})$, 故存在

$u_0\in L^2(0,T,U)$, 使得$v(\cdot)=\tilde{B}u_0$, 并且

$y(t;\ x_0,\ \tilde{B}u_0)=x(t;\ x_0,\ u)$, $t\in[0,T]$,

$\therefore\ x=x(t;x_0,u)=y(t,x_0,\tilde{B}u_0)\in K_b(x_0)$。

又 $x\in K_B(x_0)$, 由定理1, $x\in K_N(x_0)\rightleftharpoons$存在$v,u\in L^2(0,T;U)$,

使得, $\tilde{B}v\in V_T(x_0,x)$, 且

$$\tilde{N}(Fu,u)+\tilde{B}u=\tilde{B}v. \tag{2.6}$$

注意到 $R(\tilde{N}')\subset R(\tilde{B})$ 及条件 (2.5), 容易得到$\tilde{B}^{-1}\tilde{N}'$ 在 $L^2(0,T,U)$ 上严格收缩，故 (2.6) 成立。

$\therefore$ 由定理1, $x\in K_N(x_0)$。证毕。

推论 2 如果 N 与 U 无关，即 $N(x,u)=Nx$, 则当 $R(\tilde{N}(F\cdot))\subset R(\tilde{B})$, 且 $M_1T\|B\|K_b r_1<1$ 时,

$$K_N(x_0)=K_B(x_0).$$

定理 2 的证明 对 $x\in K_N(x_0)$, $\exists\, u\in L^2(0,T,U)$, s.t. $x=x(T,x_0,u)$, 取 $v=\tilde{N}(Fu,u)\in L^p(0,T;\ X)$, 则 $Lv=Fu$, 故 $y(T,x_0,\ v)=x(T,x_0,u)\in K(x_0)$,

由 $R_1(x_0)$ 的定义, $x\in R_1(x_0)$, 从而 $K_N(x_0)\subset R_1(x_0)$。

对 $x\in R_1(x_0)$, 由 $R_1(x_0)$ 的定义, $\exists\, v\in V_T(x_0,x)$, $u\in L^P(0,T,U)$ s.t. $y(T,x_0,v)=x$, $\tilde{N}(Lv,u)=v$ 取这样的 u、v 分别作为 (1.2) 和 (1.4) 的控制，则

$$x(t;\ x_0,u)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-\alpha)N(x(\alpha;\ x_0,u),u(\alpha))d\alpha,$$

$$y(t;\ x_0,v)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-\alpha)N(y(\alpha;\ x_0,v),\ u(\alpha))d\alpha$$

由 (1.1)mild 解的存在唯一性，$x=y(T;\ x_0,v)=x(T;\ x_0,u)\in K_N(x_0)$，故 $R_1(x_0)\subset K_N(x_0)$。　证毕。

推论 3　在例1中，如果$R(\tilde{N})\subset R(\tilde{B})$，且$K_b r_2<1$，则$K_N(x_0)=K_B(x_0)$。

证　类似推论 1，容易得到 $K_N(x_0)\subset K_N(x_0)$。注意到假设，对任何 $v(\cdot)\in L^2(0,T;\ U)$，$\tilde{B}^{-1}\tilde{N}(L(\tilde{B}v),\cdot)$ 在 $L^2(0,T;\ U)$ 上严格收缩，则存在 $u\in L^2(0,T;\ U)$ 使得$\tilde{N}(L(\tilde{B}u),\ u)+\tilde{B}u=\tilde{B}v$，利用定理 2，容易得到 $K_N(x_0)\supset K_B(x_0)$.　证毕 .

由推论3，当N与u无关时，即$r_2=0$时，容易知道推论2的不等式条件可以去掉。

推论 4　在系统(1.2)中，若$N(x,u)=Nx+Bu$，$B\in \mathrm{L}(U,X)$，则当$R(\tilde{N})\subset R(\tilde{B})$时，$K_N(x_0)=K_B(x_0)$。

可以看出，线性系统 (A,B) 在非线性摄动 N 的影响下，当 $R(\tilde{N})\subset R(\tilde{B})$ 时，能达集保持不变。

对J.Henry[1]所讨论的抛物型半线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial t}+Ax+f(x)=Bu,\ Q=(O,T)\times\Omega,\\ x(t.r)_{\partial\Omega}=0,\ x(0,r)=0.\end{cases}\tag{2.7}$$

利用推论 4，当 $Bu=L^2(Q)$ 时，只要 f 使得 (2.7) 有唯一 mild 解，则 (2.7) 近似能控。

又例，对G.Chen等人[2]研究的双曲型半线性系统

$$\frac{d^2w}{dt^2}+Aw+Nw=u(t),\tag{2,8}$$

A 是通常的二阶椭圆型算子，$u(\cdot)$ 为分布控制，N 是非线性函数，把 (2.8) 写成 (1.1) 的形式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}w\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ -A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -Nw\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ u\end{pmatrix},\tag{2.9}$$

利用推论 4，只要 N 使得 (2.9) 有唯一 mild 解，则摄动 N 并不影响 (2.9) 相应线性系统 $(N=0)$ 的能控性。这一结论包含了文 [2] 没能解决的系统。

$\dfrac{\partial^2 w(x.t)}{\partial t^2}-\bigtriangledown w(x,t)+\alpha_1 w(x,t)+\alpha_2 w^3(x,t)=u(x,t)$，其中 $x\subseteq\Omega\subseteq R^n,n=2$ 或 3，$t\geqslant 0$，或 3，$t\geqslant 0$。

定理3的证明方法与定理1、定理2的思想方法类似，且同时可以得到如下推论。

推论 5　若 $N(x,u)=Nx+Bu,N$ 满足一致 Lip 条件，$B\in L(U,X)$，则当 $R(\tilde{N})\subset R(\tilde{B})$ 时

$$\overline{K_N(x_0)}=\overline{K_B(x_0)}.$$

致谢 感谢赵怡、刘明扬老师的热情指导。

参 考 文 献

〔1〕 Henry, J., Etude De la Controlabilite de Certains Equations Paraboliques Non-lineaires, These, Detat, 1978.

〔2〕 Chen, G., Mills, W.h. and Crosta, G., Exact Controllability Theorems and Numerical Simulations for Some Nonlinear Differential Equations, SIAM J. Control and Optim., **19**, 4, (1981), 765–790.

The Necessary and Sufficient Conditions of Controllability on a Infintite Dimensional Semilinear System

Cai Xiunan

(Department of Mathematics, SUN YAT-SEN University, Guangzhou)

Abstract: In this paper, the necessary and sufficient conditions of controllability on a infinite dimensional semilinear system are given.

Key words: controllablity; necessary and sufficent conditions; infinte dimensional; semilinear.

国 际 会 议 简 讯

国际自动化学会主办的第 9 届辨识会议(9th IFAC / IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation)定于 1991 年 7 月 8 日至 12 日在匈牙利布达佩斯市召开. 征文范围: 自适应与自调整控制; 航空与航天; 辨识技术在故障检测中的应用; 物理参数辨识; 生物系统; 化学系统; 连续-时间系统; 收敛分析; 辨识数学; 环境系统; 辨识中的专家系统; 故障检测; 高阶矩方法; 自动化、机器人与制造业中的辨识; 辨识技术; 工业过程; 知识库辨识; 医学应用; 建模; 非线性; 参数辨识; 参数化; 电力系统; 实时辨识; 递推算法; 强壮性; 信号处理; 社会经济系统; 有关滤波、信号处理与辨识的专用计算机及并行处理机; 结构辨识; 时间序列分析; 跟踪及时变系统. 参加人需在 90 年 7 月 15 日以前将文章摘要 5 份寄往会议秘书处, 秘书处地址: Ms Eva Sós, Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Sciences, H-1518 Budapest, P.O.Box 63, Hungary. Tel: (361) 1613442; Telex: 22-5066; Telefax: 361|1667503. 同年 11 月 15 日便会收到审查结果, 全文截止日期为 91 年 2 月 15 日. 会议还设有计算机软件小组会议, 供参与者展出自己开发的辨识软件, 使用的是 IBM 个人计算机. 申请展出者应于 90 年 3 月 31 日以前把内容摘要寄往: Prof. Dr. Schumann, Asternweg 4. D-3006 Burgwedel 1, FRG (西德). 录取结果于 90 年 4 月 30 通知. 发展中国家参加人, 凡论文被录取者, 可向国际自动化学会秘书处申请资助. 地址是:

IFAC SECRETARIAT Schlossplatz 12, A-2361 Laxenburg, Austria (奥地利).

会议吁请知名学者出面组织专题小组会议. 建议方案应于 90 年 3 月 31 日前送交秘书处. 是否被接受, 将于同年 4 月 30 日前公布. 专题小组会议的论文及作者将随后宣布.