第7卷 第3期
1990年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 3
Sept., 1990

分散广义系统固定脉冲模的两个代数特征*

胡仰曾　　　　陈树中
(华东化工学院自动化研究所,上海)(华东师范大学数学系,上海)

摘要　本文提出分散广义系统固定脉冲模的两个代数特征,并用数值例子予以说明.

关键词: 广义系统;分散系统;分散固定脉冲模

1. 引　　言

考虑具有 N 个控制站的线性时不变分散广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

其中状态 $x\in R^n$, $B=[B_1,\ldots,B_N]$, $C=[C_1^T,\ldots,C_N^T]^T$, $u=[u_1^T,\ldots,u_N^T]^T$, $y=[y_1^T,\ldots,y_N^T]^T$, u_i 和 y_i 分别是第 i 个控制站的 r_i 维输入和 m_i 维输出向量, $B_i\in R^{n\times r_i}$, $C_i\in R^{m_i\times n}$, $E, A\in R^{n\times n}$. 设系统(1)满足正则性条件: $|sE-A|\not\equiv 0$. 并设

$$\operatorname{rank}E = q < n, \quad p \triangleq \deg|sE-A| < q. \tag{2}$$

在假设(2)下,系统(1)的状态 $x(t)$ 中含有输入函数的导数项和脉冲函数项,甚至含有脉冲函数的导数项,此时,称 $x(t)$ 含有脉冲模. 当广义系统的状态含有脉冲模时,一个重要的问题是确定是否存在某种控制律,使所得闭环系统的状态不含有脉冲模. 为此,文[1]利用和系统(1)受限制等价的一种标准型提出了分散固定脉冲模的概念,并给出了该系统没有分散固定脉冲模的一个充要条件以及检验该模的一个算法.

本文用和系统(1)受限制等价的另一种标准型,给出分散固定脉冲模的等价定义及其两个代数特征,并举数值例子予以说明.

2. 准备工作

设 K^* 为分散广义系统(1)的块对角信息结构,记 $R(K^*)$ 为信息结构 K^* 的全体正则实现集合,即

$$R(K^*) = \{K: K = \text{block diag}(K_1,\ldots,K_N), K_i\in R^{r_i\times m_i}, |sE-A-BKC|\not\equiv 0\}.$$

设 $K\in R(K^*)$, 控制律 $u(t)=Ky(t)$ 作用于系统(1)所得的闭环系统为

$$E\dot{x}(t) = (A+BKC)x(t). \tag{3}$$

显然系统(3)满足正则条件,故存在满秩阵 P_k 和 Q_k, 使

$$P_k[E, A+BKC]Q_k = \begin{bmatrix} I_1(K) & 0 & A_1(K) & 0 \\ 0 & J(K) & 0 & I_2(K) \end{bmatrix},$$

---

* 国家教育委员会基金资助项目.

本文于1989年2月24日收到. 1989年9月25日收到修改稿.

其中 $J(K)$为幂零阵. 于是,系统(3)受限制等价于

$$\dot{x}_1(t) = A_1(K)x_1(t), \quad J(K)\dot{x}_2(t) = x_2(t). \tag{4}$$

定义 1[1] 若对一切 $K\in R(K^*)$, $J(K)\neq 0$,则称无穷远点是系统(1)的分散固定脉冲模;若存在 $K_0\in R(K^*)$,有 $J(K_0)=0$,则称系统(1)没有分散固定脉冲模.

记 $\bar{p}=\max\{\deg|sE-A-BKC|:K\in R(K^*)\}$,显然 $\bar{p}\leqslant q$. 下面的定义 2 和定义 1 是等价的. 其证明略.

定义 2 若 $\bar{p}<q$,则称无穷远点是系统(1)的分散固定脉冲模;若 $\bar{p}=q$,则称系统(1)没有分散固定脉冲模.

定义 2 的一个优点是不通过等价变换,从系统(1)和信息结构出发,直接给出了分散固定脉冲模的定义. 下面的定理 1 可用于分散固定模存在的判断.

定理 1 对几乎所有的 $K\in R(K^*)$,有

$$\deg|sE-A-BKC| = \bar{p}.$$

证明. 略.

从定理 1 知,为判断系统(1)是否具有分散固定脉冲模,可以随机选取 $K\in R(K^*)$,计算 $p=\deg|sE-A-BKC|$. 若 $p=q$,则系统(1)没有分散固定脉冲模(因为此时必有 $\bar{p}=q$). 若 $p<q$,则几乎可肯定系统(1)具有分散固定脉冲模.

以下用广义系统的另一种标准形讨论分散固定脉冲模及其代数特征. 因为 $\mathrm{rank}E=q<n$,所以存在非奇异矩阵偶$(\bar{P},\bar{Q})$,使

$$\bar{P}E\bar{Q} = \left[\begin{array}{c:c} I_q & \\ \hdashline & 0 \end{array}\right] \triangleq \bar{E}, \tag{5}$$

其中 I_q为 q 阶单位阵,显然这样的 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 有无限多个,记

$$\boldsymbol{E} = \{(\bar{P},\bar{Q}):\bar{P},\bar{Q}\in R^{n\times n}, \mathrm{rank}\bar{P}=\mathrm{rank}\bar{Q}=n, \bar{P}E\bar{Q}=\bar{E}\}.$$

对任一$(\bar{P},\bar{Q})\in\boldsymbol{E}$,施行变换 $\bar{x}(t)=\bar{Q}^{-1}x(t)$,得受限制等价于系统(1)的分散广义系统

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t)+\bar{A}_{12}\bar{x}_2(t)+\bar{B}_1u(t),\\ 0=\bar{A}_{21}\bar{x}_1(t)+\bar{A}_{22}\bar{x}_2(t)+\bar{B}_2u(t),\\ y(t)=\bar{C}_1\bar{x}_1(t)+\bar{C}_2x_2(t),\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\bar{P}A\bar{Q}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}$, $\bar{P}B=\bar{B}=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}$, $C\bar{Q}=[\bar{C}_1\quad \bar{C}_2]$, $A_{11}\in R^{q\times q}$, $\bar{A}_{12}\in R^{q\times(n-q)}$, $\bar{A}_{21}\in R^{(n-q)\times q}$, $\bar{A}_{22}\in R^{(n-q)\times(n-q)}$, $\bar{B}_j=[\bar{B}_{j1},\cdots,\bar{B}_{jN}]$, $\bar{C}_j=[\bar{C}_{1j}^T,\cdots,\bar{C}_{Nj}^T]$, $j=1,2$, $\bar{B}_{1i}\in R^{q\times r_i}$, $\bar{B}_{2i}\in R^{(n-q)\times r_i}$, $\bar{C}_{i1}\in R^{m_i\times q}$, $\bar{C}_{i2}\in R^{m_i\times(n-q)}$. 以下称系统(6)对应于$(\bar{P},\bar{Q})$受限制等价于系统(1),显然,系统(1)和系统(6)有相同的信息结构.

以下两个引理是本文需要的.

引理 1 下面的三个断言是等价的.

1) 广义系统(1)具有脉冲模;

2) 对应于 $\boldsymbol{E}$ 中任意一个或某个阵偶$(\bar{P},\bar{Q})$的受限制等价于系统(1)的广义系统(6)具有脉冲模;

3) 对应于 $\boldsymbol{E}$ 中任意一个或某个阵偶$(\bar{P},\bar{Q})$的受限制等价于系统(1)的广义系统(6)中的 $\bar{A}_{22}$为奇异阵.

证明. 略.

引理 2 下面的三个断言是等价的.

1) 广义系统(1)具有分散固定脉冲模;

2) 对应于 E 中任意一个或某个阵偶 $(\overline{P},\overline{Q})$ 的受限制等价于系统(1)的分散广义系统(6)具有固定脉冲模;

3) 对应于 E 中任意一个或某个阵偶 $(\overline{P},\overline{Q})$ 的受限制等价于系统(1)的分散广义系统(6)中由矩阵三重组 $(\overline{C}_2,\overline{A}_{22},\overline{B}_2)$ 所组成的分散正常系统具有固定模零.

证 应用引理 1、分散广义系统固定脉冲模及分散正常系统固定模的定义[2]可证得. 具体略.

3. 分散固定脉冲模的代数特征

下面的两个定理分别是分散固定脉冲模的两个代数特征.

定理 2 分散广义系统(1)具有固定脉冲模,当且仅当存在 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的一个划分 $\{k_1,\ldots,k_p\}\cup\{k_{p+1},\ldots,k_N\}$,对 E 中的任意一个或某一个阵偶 $(\overline{P},\overline{Q})$,对应于 $(\overline{P},\overline{Q})$ 的受限制等价于系统(1)的分散广义系统(6)中的矩阵三元组 $(\overline{C}_2,\overline{A}_{22},\overline{B}_2)$,满足

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c}\overline{A}_{22} & \overline{B}_{2,k_1},\ldots\overline{B}_{2,k_p} \\ \hdashline \overline{C}_{k_{p+1},2} & \\ \vdots & \\ \overline{C}_{k_N,2} & \end{array}\right] < n-q. \tag{7}$$

证 首先应用引理2和文[3]提出的分散正常系统的固定模的代数特征,证明分散广义系统(1)具有固定脉冲模,当且仅当对任取的某个 $(\overline{P},\overline{Q})\in E$,存在划分 $\{k_1,\ldots,k_p\}\cup\{k_{p+1},\ldots,k_n\}$,(7)式成立. 接着用矩阵理论,关于对应于 E 中任意其它阵偶的和系统(1)受限制等价的分散广义系统(6)及其此划分,(7)式同样成立. 具体略.

定理 3 分散广义系统(1)的脉冲模是固定的,当且仅当零是分散正常系统 $(\overline{C}_2,\overline{A}_{22},\overline{B}_2)$,

$$\dot{w}(t)=\overline{A}_{22}w(t)+\overline{B}_2u(t),\quad v(t)=\overline{C}_2w(t) \tag{8}$$

的关于信息结构 K^* 的所有各维非奇异正规子系统的共同传输零点. 此处 $(\overline{C}_2,\overline{A}_{22},\overline{B}_2)$ 是对应于 E 中某一个或任意一个阵偶的和系统(1)受限制等价的分散广义系统(6)中的矩阵三元组.

证 首先应用引理 2 及文[4]所提出的代数特征,证明对应于 E 中某个阵偶的 $(\overline{C}_2,\overline{A}_{22},\overline{B}_2)$,系统(1)的脉冲模是固定的,当且仅当零是分散正常系统(8)的所有各维非奇异正规子系统的共同传输零点. 接着用矩阵理论,证明对E中的任意一个阵偶,结论同样成立. 具体略.

4. 例

设有广义系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad y(t)=Cx(t), \tag{9}$$

其中 $x\in R^5,u\in R^3,y\in R^3$,矩阵 E、A、B 和 C 分别为

$$E=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},B=[b_1\quad b_2\quad b_3],b_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},b_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},\quad c_1=[0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0],\quad c_2=[0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0],\quad c_3=[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0].$$

显然 $q=\operatorname{rank}E=1$.

例 1　设广义系统(9)具有块对角信息结构 $K_1^*=\left[\begin{array}{cc:c}*&*&\\ \hdashline &&*\\ &&*\end{array}\right]$，$K_1^*$ 下，系统(9)为具有两个控制站的分散广义系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1u_1(t)+B_2u_2(t),\quad y_i(t)=C_ix(t),\quad i=1,2,\tag{10}$$

其中　$u_1\in R^1,u_2\in R^2,y_1\in R^2,y_2\in R^1,B_1=b_1,B_2=[b_2\quad b_3],C_1=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix},C_2=c_3$. 由计算可知，$\bar{p}=0<q=\operatorname{rank}E=1$. 由定义 2，系统(10)具有固定脉冲模. 取 $(\bar{P},\bar{Q})\in E$，其中 $\bar{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\bar{Q}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$. 在对应于$(\bar{P},\bar{Q})$的与系统(10)受限制等价的广义系统(6)中，$\bar{A}_{22}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\bar{B}_2=[\bar{B}_{21}\quad\bar{B}_{22}],\bar{B}_{21}=\bar{b}_1,\bar{B}_{22}=[\bar{b}_2\quad\bar{b}_3],\ \bar{b}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},$

$$\bar{b}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\bar{b}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\bar{c}_2=\begin{bmatrix}\bar{C}_{12}\\\bar{C}_{22}\end{bmatrix},\bar{C}_{12}=\begin{bmatrix}\bar{c}_1\\\bar{c}_2\end{bmatrix},\bar{C}_{22}=[\bar{c}_3],\bar{c}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T,\bar{c}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}^T,\bar{c}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}^T.$$

(i)　取划分$\{1,2\}=\{1\}\cup\{2\}$. 有 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\bar{A}_{22}&\bar{B}_{21}\\\bar{C}_{22}&\end{bmatrix}=3<n-q=4$. 由定理 2，分散广义系统(10)具有固定脉冲模.

(ii)　记 S 为分散正常系统$(\bar{C}_2,\bar{A}_{22},\bar{B}_2)$关于信息结构 K_1^* 的全体非奇异正规子系统集合. 显然，$S=\{(\bar{c}_1,\bar{A}_{22},\bar{b}_1),(\bar{c}_2,\bar{A}_{22},\bar{b}_1),(\bar{c}_3,\bar{A}_{22},\bar{b}_2),(\bar{c}_3,\bar{A}_{22},\bar{b}_3),(\begin{bmatrix}\bar{c}_1\\\bar{c}_2\end{bmatrix},\bar{A}_{22},[\bar{b}_1,\quad\bar{b}_2]),(\begin{bmatrix}\bar{c}_1\\\bar{c}_3\end{bmatrix},\bar{A}_{22},[\bar{b}_1\quad\bar{b}_3]),(\begin{bmatrix}\bar{c}_2\\\bar{c}_3\end{bmatrix},\bar{A}_{22},[\bar{b}_1\quad\bar{b}_2]),(\begin{bmatrix}\bar{c}_2\\\bar{c}_3\end{bmatrix},\bar{A}_{22},[\bar{b}_2\quad\bar{b}_3])\}$. 不难验证，零是所有这些非奇异正规子系统共同的传输零点. 由定理 3，系统(10)具有固定脉冲模.

例 2 设广义系统(9)具有块对角信息结构 $K_2^* = \begin{bmatrix} * & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & * & * \\ & \vdots & * & * \end{bmatrix}$. K_2^*下，系统(9)成为具有两个控制站的分散广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \quad y_i(t) = C_ix(t), \quad i = 1,2, \tag{11}$$

其中 $u_1\in R^1$, $u_2\in R^2$, $y_1\in R^1$, $y_1\in R^2$, B_1 和 B_2 同例 1，而 $C_1=c_1, C_2=\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ 计算得 $\bar{p}=\mathrm{rank}E=1$. 由定义 2，系统(11)没有固定脉冲模. 取例 1 中的矩阵偶$(\bar{P},\bar{Q})$，显然$(\bar{P},\bar{Q})\in E$，得对应于$(\bar{P},\bar{Q})$的与系统(11)受限制等价的分散广义系统(6)，其中 $\bar{A}_{22}$同例 1，$\bar{B}_2=[\bar{B}_{21} \quad \bar{B}_{22}]$，$\bar{B}_{21}=\bar{b}_1$, $\bar{B}_{22}=[\bar{b}_2 \quad \bar{b}_3]$, $\bar{C}_2=\begin{bmatrix} \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{C}_{12}=\bar{c}_1$, $\bar{C}_{22}=\begin{bmatrix} \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_i, \bar{c}_i (i=1,2,3)$同例 1.

(i) $\{1,2\}$的不同的划分共有 4 个：$\{1,2\}=\{1,2\}\cup\varphi=\{1\}\cup\{2\}=\{2\}\cup\{1\}=\varphi\cup\{1,2\}$. 显然 $\mathrm{rank}[\bar{A}_{22} \quad \bar{B}_{21} \quad \bar{B}_{22}]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{B}_{21} \\ \bar{C}_{22} & \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{B}_{22} \\ \bar{C}_{12} & \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}_{22} \\ \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{22} \end{bmatrix}=n-q\geqslant 4$. 由定理 2，系统(11)没有固定脉冲模.

(ii) 显然，$\left(\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix}, \bar{A}_{22}, [\bar{b}_1 \quad \bar{b}_3]\right)\in S$，且 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{b}_1 & \bar{b}_3 \\ \bar{c}_1 & & \\ \bar{c}_2 & & \end{bmatrix}=6=(n-q)+2$. 于是，零不是系统$(\bar{C}_2,\bar{A}_{22},\bar{B}_2)$的传输零点. 由定理 3，系统(11)没有固定脉冲模.

参 考 文 献

[1] 王朝珠、王恩平，广义分散控制系统的的无穷远固定模，系统科学与数学，2，(1988)，142—150.

[2] Wang, S. H. and E. J. Davison, On the Stabilization of Decentralized Control Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC—18, 473—478.

[3] Anderson, B. D.O . and D. J. Clements, Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control, Automatica, 17, (1981), 703—712.

[4] Hu Yangzeng and Jiang Weisun, New Characterization of Decentralized Fixed Modes and Their Applications, Proceedings of the Ninth Triennial World Congress of IFAC, 3, (1984), 1183—1188.

Two Algebraic Characteristics of Fixed Impulse Modes for Decentralized Generalized Systems

Hu Yangzeng

(Institute of Automation, East China University of Chemical Technology, Shangchai)

Chen Shuzhong

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shangchai)

Abstract: Two algebraic characteristics of fixed impulse modes for decentralized generalized systems are given in the paper. Two examples are given for illustration.

Key words: generalized systems; decentralized systems; decentralized fixed impulse modes