第8卷 第1期
1991年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No.
Mar., 199

大系统动态递阶控制设计

金朝永
(北京水电经济管理学院数学系)

摘要:本文在[1]的模型基础上,研究了当系统具有二次性能指标时如何设计动态递阶控制问题,提出了动态递阶控制模型和三级递阶算法,并详细讨论了它的性质和收敛性问题,该模型和算法克服了文献[2]中的缺陷.

关键词:动态模型;递阶控制;分散镇定

1 引 言

近年来,由于实际应用及理论发展的需要,对大系统递阶控制理论做了很多研究工作[1—5],取得了较大的进展,然而这方面的研究成果主要侧重于算法研究,即通过各子系统的最优控制经递阶算法达到整个大系统的最优或次优.这里递阶算法的高一层次主要是适应最优控制的某种代数算法,对于整个系统的其它特性(如稳定性,镇定性和极点配置等)尚没有令人满意的结果. Gerome 和 Bemuson 于1979年对具有二次性能指标的线性定常大系统提出了一个最优分散控制算法[2],该算法在迭代过程中保证了大系统的镇定,但遗憾的是它必须假定存在使得系统镇定的分散反馈初始矩阵 $K_0=\mathrm{diag}\{K_{10},K_{20},\cdots,K_{N0}\}$,然而在一般情况下这个假设是不成立的,因此算法的应用受到了限制.

文献[1]避开传统的代算方法,首次在国际上提出了一种新的模型,即高层也是动态系统,从理论上研究了当下层的各子系统间其相互耦合均给定时如何设计上一层动态协调系统和动态递阶控制,使得整个闭环系统无固定模,可任置极点等一系列重要理论问题,本文应用[1]的模型,研究了当系统具有二次性能指标时如何设计动态递阶控制问题,提出了递阶控制的动态模型和三级递阶控制的设计方法,该模型及算法改进了[2]中的结论.

2 模型的建立

考虑线性定常大系统:

$$\widetilde{D}_i:\dot{x}_i(t)=A_{ii}x_i(t)+B_iu_i(t)+\sum_{j=1\ j\neq i}^{N}A_{ij}x_j(t),\tag{2.1}$$

$$y_i(t)=C_ix_i(t),\quad i=1,2,\cdots,N\tag{2.2}$$

具有二次性能指标

$$J(u)=\int_0^{\infty}(x^TQx+u^TRu)\mathrm{d}t.\tag{2.3}$$

设计上一层动态协调系统 $\widetilde{D}_0$

本文于1988年12月7日收到. 1989年12月27日收到修改稿.

$$\widetilde{D}_0: \dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + B_0 u_0(t), \tag{2.4}$$
$$y_0(t) = C_0 x_0(t). \tag{2.5}$$

取大系统的递阶控制形式为

$$u_i(t) = F_{ii} y_i(t) + F_{i0} y_0(t) \quad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.6}$$
$$u_0(t) = \sum_{j=1}^{N} F_{0j} y_j(t) + F_0 y_0(t). \tag{2.7}$$

其中 $x_i \in R^{n_i}$, $u_i \in R^{m_i}$, $y_i \in R^{p_i}$, $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = p$, $Q = Q_1 Q_1^T \geqslant 0$, $R > 0$, $x = [x_1^T, x_2^T, \cdots, x_N^T]^T$, $u = [u_1^T, \cdots, u_N^T]^T$.

记 $A = (A_{ij}) \in R^{n\times n}$, $B = \mathrm{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_N\} \in R^{n\times m}$,

$C = \mathrm{diag}\{C_1, C_2, \cdots, C_N\} \in R^{p\times n}$, $F = \mathrm{diag}\{F_{11}, F_{22}, \cdots, F_{NN}\}$,

$F_\alpha = [F_{10}^T, F_{20}^T, \cdots, F_{N0}^T]^T$, $F_\beta = [F_{01}, F_{02}, \cdots, F_{0N}]$,

则大系统可简写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u_0(t) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ u_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & F_\alpha \\ F_\beta & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

我们所要研究的问题可表述成下面的形式：

问题 2.1 寻找递阶控制规律(2.10)，使性能指标(2.3)式达到最优，同时闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_0(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & F_\alpha \\ F_\beta & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

渐近稳定.

在问题2.1中，性能指标(2.3)和闭环系统(2.11)的状态变量和输出变量不在同一向量空间里，故不能直接求解，为此，我们引入模型(2.2)

模型 2.2 $\min \widetilde{J(\overline{F}, \varepsilon)} \quad \varepsilon > 0,$ (2.12)

$$\dot{\overline{x(t)}} = \overline{A}\,\overline{x(t)} + \overline{B}\,\overline{u(t)}, \tag{2.13}$$
$$\overline{y(t)} = \overline{C}\,\overline{x(t)}, \tag{2.14}$$
$$\overline{u(t)} = \overline{F}\,\overline{y(t)} \quad \overline{F} \in \Omega(\overline{F}). \tag{2.15}$$

其中 $\overline{x(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix}$, $\overline{u(t)} = \begin{bmatrix} u(t) \\ u_0(t) \end{bmatrix}$, $\overline{y(t)} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix}$,

$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}$, $\overline{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_0 \end{bmatrix}$, $\overline{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix}$, $\overline{F} = \begin{bmatrix} F & F_\alpha \\ F_\beta & F_0 \end{bmatrix}$,

$\overline{Q(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_0} \end{bmatrix}$, $\overline{R(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{m_0} \end{bmatrix}$, $\varepsilon > 0$ 为小参数.

$$\Omega(\overline{F})=\left\{\overline{F}\,|\,\overline{F}=\begin{bmatrix}F & F_\alpha\\ F_\beta & F_0\end{bmatrix},F=\mathrm{diag}\{F_{11},F_{22},\cdots,F_{NN}\},F_{ii}\in R^{m_i\times p_i},\text{且 }\overline{A}+\overline{B}\;\overline{F}\;\overline{C}\text{ 渐近稳定}\right\},\tag{2.16}$$

$$\widetilde{J(\overline{F},\varepsilon)}=\int_0^\infty(\bar{x}^T\overline{Q}\bar{x}+\bar{u}^T\overline{R}\;\bar{u})\mathrm{d}t.\tag{2.17}$$

我们将在第4节中为这一模型设计一个三级递阶算法,并在第5节中说明模型2.2与问题2.1的关系及 $\varepsilon>0$ 的意义.

3 预备知识

考虑大系统:

$$\dot{\widetilde{x(t)}}=\widetilde{A}\,\widetilde{x(t)}+\sum_{i=1}^{N}\widetilde{B_i}\,\widetilde{u_i(t)},\tag{3.1}$$

$$\widetilde{y_i(t)}=C_i\,\widetilde{x_i(t)},\qquad i=1,2,\cdots,N.\tag{3.2}$$

其中 $\widetilde{x(t)}\in R^n,\widetilde{u_i(t)}\in R^{m_i},\widetilde{y_i(t)}\in R^{p_i},\sum\limits_{i=1}^{N}m_i=m,\sum\limits_{i=1}^{N}p_i=p$,显然系统(2.1)是系统(3.1)的特殊情形.

引入记号: $S=\{1,2,\cdots,N\},\quad G=\{i_1,i_2,\cdots,i_g\}\subset S$

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_g\leqslant N,\quad G^\perp=S-G,$$

$$\hat{B}_G=[\widetilde{B_{i_1}},\widetilde{B_{i_2}},\cdots,\widetilde{B_{i_g}}],\ \hat{C}_G=[\widetilde{C}_{i_1}^T,\widetilde{C}_{i_2}^T,\cdots,\widetilde{C}_{i_g}^T]^T,$$

$$\boldsymbol{E}=\{E=(e_{ij})\in R^{N\times N}\,|\,e_{ij}=0\text{ 或 }1,\text{且 }e_{ii}=1,\ i=1,2,\cdots,N\}.$$

对任意的 $F\in R^{m\times p}$ 和 $E\in\boldsymbol{E}$,将 F 写成分块形式

$$F=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\cdots F_{1N}\\ F_{21} & F_{22}\cdots F_{2N}\\ F_{N1} & F_{N2}\cdots F_{NN}\end{bmatrix},\qquad F_E=\begin{bmatrix}e_{11}F_{11} & e_{12}F_{12} & \cdots & e_{1N}F_{1N}\\ e_{21}F_{21} & e_{22}F_{22} & \cdots & e_{2N}F_{2N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ e_{N1}F_{N1} & e_{N2}F_{N2} & \cdots & e_{NN}F_{NN}\end{bmatrix}$$

记 $F(E)=\{F_E\,|\,F\in R^{m\times p},\quad E\in\boldsymbol{E}\}$.

定义 3.1[3] 对于给定的 $E\in\boldsymbol{E}$,称

$$\Lambda(\widetilde{C},\widetilde{A},\widetilde{B},F(E))=\bigcap_{F_E\in F(E)}\sigma(\widetilde{A}+\widetilde{B}F_E\widetilde{C})$$

为系统(3.1)在反馈结构 E 下的固定模,$\sigma(\cdot)$ 为谱集,设 $e=[1,1,\cdots,1]^T\in R^N$,记 $E_0=\begin{bmatrix}I_N & e\\ e^T & 1\end{bmatrix}$,则与模型2.2同维的任意的 $\overline{F}\in R^{(m+m_0)\times(p+p_0)}$,$\overline{F}_{E_0}$ 可写成

$$\overline{F}_{E_0}=\begin{bmatrix}F_{11} & & & & F_{10}\\ & F_{22} & & & F_{20}\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & F_{NN} & F_{N0}\\ F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0N} & F_0\end{bmatrix}.$$

根据文献[4]中的有关结论不难得到下面结论:

定理 3.1 存在 A_0,B_0,C_0 使系统(2.8)在反馈(2.10)下无固定模的充要条件是(C,

$A,B)$可控可观，且 A_0,B_0,C_0 的最小维数为 $n_0=m_0=p_0=n-h$.

其中
$$h=\min_{G\subset S}\min_{\lambda\in\sigma(A)}\left\{\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_n-A & \hat{B}_G\\ \hat{C}_G{}^{\perp} & 0\end{bmatrix}\right\},\tag{3.3}$$
$$\widetilde{B}_i=[0,0,\cdots,B_i^T,\cdots,0]^T\quad \widetilde{C}_i=[0,0,\cdots,C_i,\cdots,0],$$
$$\hat{B}_G=[\widetilde{B}_{i_1},\widetilde{B}_{i_2},\cdots,\widetilde{B}_{i_g}]\quad \hat{C}_G=[\widetilde{C}_{i_1}^T,\widetilde{C}_{i_2}^T,\cdots,\widetilde{C}_{i_g}^T]^T.$$

定理 3.2 设 $C_i\neq0,i=1,2,\cdots,N$，则存在 A_0,B_0,C_0，使系统(2.8)在反馈(2.10)下可任置极点的充要条件是(C,A,B)可控可观.

根据文献[5]和[4]，我们可按下列条件确定初始矩阵 A_0,B_0,C_0.

1) (C_0,A_0,B_0)可控可观.

2) rank $B_0\geqslant n-h$，rank$C_0\geqslant n-h$，h 由(3.3)式确定.

4 递阶算法

对模型 2.2，我们作如下推导：
$$\overline{x(t)}=\exp(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})t\,\overline{x(0)}\triangleq\varphi(t,0)\,\overline{x(0)}.\tag{4.1}$$
其中
$$\varphi(t,0)=\exp(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})t,\text{简记为 }\varphi.\tag{4.2}$$
所以
$$\widetilde{J(\overline{F},\varepsilon)}=\overline{x(0)}^T\{\int_0^\infty\varphi^T(\overline{Q}+\overline{C}^T\overline{F}^T\overline{R}\,\overline{F}\,\overline{C})\varphi dt\}\,\overline{x(0)}.\tag{4.3}$$
利用矩阵性质
$$x^TAx=\operatorname{tr}[Axx^T]=\operatorname{tr}[xx^TA],\tag{4.4}$$
将(4.3)式写成
$$\widetilde{J(\overline{F},\varepsilon)}=\operatorname{tr}\{\int_0^\infty\varphi^T(\overline{Q}+\overline{C}^T\overline{F}^T\overline{R}\,\overline{F}\,\overline{C})\varphi dt\,\overline{x(0)}\,\overline{x(0)}^T\}.\tag{4.5}$$
记
$$\overline{V}_0=\overline{x(0)}\,\overline{x(0)}^T,\quad H(\overline{F},\varepsilon)=\int_0^\infty\varphi^T(\overline{Q}+\overline{C}^T\overline{F}^T\overline{R}\,\overline{F}\,\overline{C})\varphi dt,\tag{4.6}$$
则
$$\widetilde{J(\overline{F},\varepsilon)}=\operatorname{tr}[H(\overline{F},\varepsilon)\overline{V}_0].\tag{4.7}$$
按[2]中的处理方法，将(4.7)改写成
$$\hat{J}(\overline{F},\varepsilon)=\operatorname{tr}[H(\overline{F},\varepsilon)].\tag{4.8}$$

其中 $\hat{J}(\overline{F},\varepsilon)$与$\widetilde{J(\overline{F},\varepsilon)}$仅相差一常系数.

根据文献[7]我们有
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}}=2(\overline{R}\,\overline{F}\,L\overline{C}^T+\overline{B}^THL\overline{C}^T), & (4.9)\\[2ex] L=\displaystyle\int_0^\infty\varphi^T\varphi dt. & (4.10)\end{cases}$$
由矩阵理论知当且仅当$(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})$稳定时，$H$ 和 L 存在，正定且是下列矩阵方程的解
$$H(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})+(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})H+\overline{Q}+\overline{C}^T\overline{F}^T\overline{R}\,\overline{F}\,\overline{C}=0,\tag{4.11}$$
$$L(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})+(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}\,\overline{C})L+I=0.\tag{4.12}$$

用 $D=\begin{bmatrix}D_F & D_{F_\alpha}\\ D_{F_\beta} & D_{F_0}\end{bmatrix}$ 表示与 $\overline{F}$ 具有相同结构，且其元为$\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}}$中相对应的元，称 D 为$\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}}$的允许方向矩阵. 显然 D_F 为对角块矩阵：$D=\operatorname{diag}\{D_{F_{11}},D_{F_{22}}\cdots,D_{F_{NN}}\}$，$D_{F_{ii}}\in R^{m_i\times p_i}$，$i=1,2,\cdots,N$. 下面我们给出模型 2.2 的三级递阶算法.

第三级

步 1:给定参数 ε 的初值 $\varepsilon:=\varepsilon_0$.

第二级

步 2:根据(3.4)和(3.5)两式选取 A_0,B_0,C_0.

步 3:选取初始反馈增益矩阵 $\overline{F}_0\in\Omega(\overline{F})$.

第一级

步 4:利用(4.9)到(4.12)式决定梯度矩阵$\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}}$和允许方向矩阵 D_l(这里 l 是迭代次数).

步 5:检查 D_l 的元素的绝对值是否小于预定的小正数 δ 以确定第一级算法的收敛性,若是转步 8,否则执行步 6.

步 6:取 $\overline{F}_{l+1}=\overline{F}_l-\alpha_lD_l$,这里 α_l 是搜索步长,它必须使得 $\hat{J}(\overline{F}_{l+1},\varepsilon)<\hat{J}(\overline{F}_l,\varepsilon)$成立.

步 7:置 $l+1:=0$ 转步 4(第一级).

步 8:记第一级最优解为$\overline{x(\varepsilon)}^*=[x^*(\varepsilon)^T,x_0^*(\varepsilon)]^T,\overline{u(\varepsilon)}^*=[u^*(\varepsilon)^T\quad u_0^*(\varepsilon)^T]^T$,验证不等式

$$|J(x^*(\varepsilon_k),u^*(\varepsilon_k))-J(x^*(\varepsilon_{k-1}),u^*(\varepsilon_{k-1}))|<\sigma,$$

若成立则停止迭代,打印$\overline{x(\varepsilon_k)^*},\overline{u(\varepsilon_k)^*},x^*(\varepsilon_k),u^*(\varepsilon_k)$,否则执行步 9,这里 σ 是收敛参数,k 表示对 ε 第 k 次赋值.

步 9:(转回第三级):置 $\varepsilon_0:=\mu_{k+1}\varepsilon_0$,转步 4,$0<\mu_{k+1}<1$.

5 算法的性质和收敛性问题

关于第 4 节中提出的递阶算法,有下面两个重要性质:

定理 5.1 设 $\hat{J}(\overline{F},\varepsilon)\in C^1$,则存在 $\alpha_l>0$ 使得

$$\hat{J}(\overline{F}_{l+1},\varepsilon)<\hat{J}(\overline{F}_l,\varepsilon). \tag{5.1}$$

这里 $\overline{F}_{l+1}=\overline{F}_l-\alpha_lD_l$,$C^1$ 表示具有一阶连续偏导泛函集合.

定理 5.2 假设(Q_1^T,A)完全可观测,其中 $Q=Q_1Q_1^T\geqslant0$. 又设 $\overline{V}_0=\overline{x(0)x(0)^T}>0$,则对每一个使得(5.1)式成立的 α_l 都有

$$\overline{F}_{l+1}=\overline{F}_l-\alpha_lD_l\in\Omega(\overline{F}). \tag{5.2}$$

这两个定理保证了算法在迭代过程中的下降特性和可行性,它们的证明我们将在附录中给出,关于算法的收敛性问题比较复杂,它包含各层迭代收敛和整体收敛两层含义,下面我们给出主要结论.

定理 5.3 对于固定的 $\varepsilon>0$,记模型 2.2 的最优解为$\overline{x(t,\varepsilon)}^*=[x^*(t,\varepsilon)^T\quad x_0^*(t,\varepsilon)^T]^T$, $\overline{u(t,\varepsilon)}^*=[u^*(t,\varepsilon)^T\quad u_0^*(t,\varepsilon)^T]^T$,则有:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\hat{J}(\overline{x(t,\varepsilon)}^*,\overline{u(t,\varepsilon)}^*)$存在.

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}J(x^*(t,\varepsilon),u^*(t,\varepsilon))=\min\limits_{(x,u)}J(x,u)$.

定理 5.4 设 $\overline{F}_l,D_l$ 为递阶算法产生的迭代矩阵序列,且$\lim\limits_{l\to\infty}\alpha_l=\alpha_0>0$,则有

1) $\lim\limits_{l\to\infty}\hat{J}(\overline{F},\varepsilon)$存在.

2) $\lim\limits_{l\to\infty}D_l=0$.

这两个定理的证明不难,限于篇幅,在此略去证明,只给出下面几点注释.

1) 参数 $\varepsilon>0$ 不仅作为参数调节,控制着整个递阶算法的收敛,而且还保证了矩阵 $\overline{R}$

>0 及 $(\overline{Q}_1^T, \overline{A})$ 的可观测性. 这两个条件对定理 5.1 及定理 5.2 的证明十分重要.

2) 定理 5.3 和定理 5.4 揭示了模型 2.2 和问题 2.1 的最优解之间的关系，部分解决了算法的收敛性问题，但矩阵序列 $\{H(\overline{F}_l)\}$ 和 $\{\overline{F}_l\}$ 仍有可能不收敛，因为有例子表明[2]，$\mathrm{tr}[H(\overline{F}_l)]$ 的收敛并不隐含 $H(\overline{F}_l)$ 的收敛.

6 小 结

本文围绕如何设计一个具有稳定和分散镇定特性的最优递阶控制问题展开了讨论，在文献[1]的模型基础上提出了新的最优控制模型和递阶算法，并对算法的性质和收敛性问题作了详细讨论. 作为本文的结束，我们指出，由于初始矩阵 A_0, B_0, C_0 及 $\overline{F}_0$ 的选取及矩阵序列 $\{\overline{F}_l\}$ 和 $\{H(\overline{F}_l)\}$ 收敛性等问题，将直接影响和限制算法的在线应用.

7 附录(Appendix)

1)定理 5.1 的证明

引理 7.1[2] 设 $g(k)$ 为一个关于矩阵 k 的迹函数，若 $\varepsilon\to 0$ 时 $g(k)$ 可以写成

$$g(k) = g(k+\varepsilon\Delta k) - \varepsilon\mathrm{tr}\{M(k)\Delta k\},$$

则有
$$\frac{\partial g(k)}{\partial k} = M^T(k).$$

这里，$M^T(k)$ 是一个与 k 有关的矩阵. 应用这个引理，我们来证明定理 5.1. 将 $\hat{J}(\overline{F}_{l+1},\varepsilon) = \hat{J}(\overline{F}_l - \alpha_l D_l,\varepsilon)$ 在 $\alpha_l = 0$ 附近线性展开

$$\hat{J}(\overline{F}_l - \alpha_l D_l,\varepsilon) = \hat{J}(\overline{F}_l,\varepsilon) + \alpha_l\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{J}(\overline{F}_l - \xi D_l,\varepsilon)\big|_{\xi=0},$$

引用引理 7.1 有

$$\hat{J}(\overline{F}_l - \alpha_l D_l,\varepsilon) = \hat{J}(\overline{F}_l,\varepsilon) - \alpha_l\mathrm{tr}\{(\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}})^T D_l\}.$$

比较上面两式得到：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{J}(\overline{F}_l - \xi D_l,\varepsilon)\big|_{\xi=0} = -\,\mathrm{tr}\{(\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}})^T D_l\}.$$

将矩阵 $\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}}$ 和 D_l 按 $\overline{F}$ 的结构分块不难验证

$$\mathrm{tr}\{(\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}})^T D_l\} = \mathrm{tr}(D_l^T D_l),$$

所以
$$\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{J}(\overline{F}_l - \xi D_l,\varepsilon)\big|_{\xi=0} = -\,\mathrm{tr}(D_l^T D_l).$$

若 $D_l = 0$，则停止迭代由收敛性准则得最优解. 若 $D_l \neq 0$，则 $\mathrm{tr}(D_l^T D_l) > 0$，因此对每一个步长 $\alpha_l > 0$ 有

$$\hat{J}(\overline{F}_l - \alpha_l D_l,\varepsilon) = \hat{J}(\overline{F}_l,\varepsilon)\text{-}\alpha_l\mathrm{tr}(D_l^T D_l) < \hat{J}(\overline{F}_l,\varepsilon),$$

$l=1,2,\cdots$. D_l 为 $(\frac{\partial\hat{J}}{\partial\overline{F}})$ 的允许方向矩阵. 证毕.

2) 定理 5.2 的证明

引理 7.2[6] (C,A) 可检测当且仅当下面命题成立：设 $\lambda\in Z$, $\xi\in Z^n$，若 $A\xi = \lambda\xi$, $C\xi = 0$ 且 $\xi\neq 0$，则 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$，其中 Z 表示复数域.

引理 7.3 设 (Q_1^T, A) 可检测，且矩阵方程

$$(A+BK)^TP+P(A+BK)+Q_1Q_1^T+K^TPK=0, R>0$$

的解 P 半正定，则 $(A+BK)$ 渐近稳定.

这个引理的证明不难，可采用反证法并应用引理 7.2，故在此略去证明.

引理 7.4 设 $Q=Q_1Q_1^T$ 且 (Q_1^T,A) 完全可观测，则 $H(\bar{F},\varepsilon)>0$ 和有界的充要条件是 $\mathrm{tr}[H(\bar{F},\varepsilon)]<\infty$.

证 引理的必要性是显然的. 现证充分性. 因为

$$\mathrm{tr}[H(\bar{F},\varepsilon)]=\int_0^\infty \mathrm{tr}\{\varphi^T(\bar{Q}+\bar{C}^T\bar{F}^T\bar{R}\,\bar{F}\bar{C})\varphi\}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\Big[\sum_{i=1}^{n+n_0}\lambda_i(t)\Big]\mathrm{d}t<\infty.$$

这里 $\lambda_i(t)$ 是矩阵 $\varphi^T(\bar{Q}+\bar{C}^T\bar{F}^T\bar{R}\,\bar{F}\,\bar{C})\varphi\geqslant 0$ 的全部特征值，因此 $\lambda_i(t)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n+n_0)$ 所以

$$\int_0^\infty \lambda_{\max}(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty\sum_{i=1}^{n+n_0}\lambda_i(t)\mathrm{d}t<\infty,$$

所以 $$\|H(\bar{F},\varepsilon)\|_2\leqslant\int_0^\infty\|\varphi^T(\bar{Q}+\bar{C}^T\bar{F}^T\bar{R}\,\bar{F}\,\bar{C})\varphi\|_2\mathrm{d}t=\int_0^\infty\lambda_{\max}(t)\mathrm{d}t<\infty,$$

这就证明了 $H(\bar{F},\varepsilon)$ 有界. 下面我们用反证法来证明 $H(\bar{F},\varepsilon)>0$，因为对于任意的 $\bar{x}\in R^{n+n_0}$ 有

$$\bar{x}^TH(\bar{F},\varepsilon)\bar{x}\geqslant 0.$$

若对某一非零向量 $\bar{x}_0$ 使得 $\bar{x}_0^TH(\bar{F},\varepsilon)\bar{x}_0=0$，我们取系统的初始状态 $\overline{x(0)}=\bar{x}_0/\|\bar{x}_0\|$，则由 (4.3) 式知 $\widetilde{J(\bar{F}},\varepsilon)=\bar{x}_0^TH(\bar{F},\varepsilon)\bar{x}_0=0$，亦即

$$\widetilde{J(\bar{F}},\varepsilon)=\int_0^\infty(\bar{x}^T\bar{Q}\bar{x}+\bar{u}^T\bar{R}u)\mathrm{d}t=0.$$

此式为零的唯一情形是非负的被积函数为零，故对所有的 $t>0$，$\overline{u(t)}=0$，因此当系统采用零控制时 t 时刻的系统状态为 $\exp(\bar{A})t\bar{x}_0$，所以

$$\int_0^\infty\bar{x}_0^T\exp(\bar{A})^Tt\bar{Q}_1\bar{Q}_1^T\exp(\bar{A})t\bar{x}_0\mathrm{d}t=\bar{x}_0^TH(\bar{F},\varepsilon)\bar{x}_0=0.$$

此式蕴示着 $Q_1^T\exp(\bar{A})t\bar{x}_0=0$，这与 $(\bar{Q}_1^T,\bar{A})$ 完全可观测的假设矛盾[6]，故 $H(\bar{F},\varepsilon)>0$. 证毕.

下面我们再来证明定理 5.2.

因为 $\bar{V}_0>0$ 所以由 $\widetilde{J(\bar{F}},\varepsilon)=\mathrm{tr}[H(\bar{F},\varepsilon)\bar{V}_0]$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[H(\bar{F}_l-\alpha_lD_l,\varepsilon)]&\leqslant\lambda_{\min}^{-1}(\bar{V}_0)\,\widetilde{J(\bar{F}_l}-\alpha_lD_l,\varepsilon)\\&\leqslant\lambda_{\min}{}^{-1}(\bar{V}_0)\,\widetilde{J(\bar{F}_l},\varepsilon)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{\min}^{-1}(\bar{V}_0)\,\widetilde{J(\bar{F}_0},\varepsilon)<\infty.\end{aligned}$$

由引理 7.4 知 $H(\bar{F}_l-\alpha_lD_l,\varepsilon)>0$ 和有界，又因 $H(\bar{F}_l-\alpha_lD_l,\varepsilon)$ 满足矩阵方程(4.11)且 $(\bar{Q}_1^T,\bar{A})$ 完全可观测，由引理 7.3 知 $\bar{A}+\bar{B}(\bar{F}_l-\alpha_lD_l)\bar{C}$ 渐近稳定，所以 $\bar{F}_l-\alpha_lD_l\in\Omega(\bar{F})$，$l=1,2,\cdots$，证毕.

参 考 文 献

[1] Wei—Bing Gao, Zhi—Cheng Shi, Run—Yi Yu. A New Approach to Hierarchical Control of Large Scale Systems. 4th IFAC/IFORS, Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications, 1986, Aug. 26—29, Zurich

[2] Geromel, J. C., and J. Bemuson. An Algorithm for Optimal Decentralized Regulation of Linear Quadratic Interconnected

Systems. Automatic, 1979, 15: 489—491

[3] Sezer, M. E. and D. D. Siljak. On Structurelly Fixed Modes. Preceedings of The IEEE Inter. Sympo. on Circu. and Systems, Chicago Illionois, 1981, 558

[4] 施志诚,高为炳.大系统的动态递阶控制.自动化学报,1987,13(2):111—119

[5] Run—Yi Yu, Wei—Bing Gao. Minimal Dynamical Controller for Large Scale Systems. Proc. Int. Conf. on SMC, 1988, 1337—1340, Beijing/Shengyoug

[6] 须田信英,玉慎三,池田雅夫著;曹长修译.自动控制中的矩阵理论.北京:科学出版社,1979

[7] Lavine, W. and Athans, M.. On the Determination of Optimal Output Feedback Gains for Linear Systems. IEEE Trans. on Auto. Cont., 1970, 15

On the Designing of Dynamical Hierarchical Control for Large Scale Systems

Jin Chaoyong

(Department of Mathematics, Beijing Institute of Economic Management of Water Resources and Electric Power)

Abstract: Based on the model in [1], this paper is concerned with the dynamical hierarchical control for large—scale systems with a linear quadratic regulator. A new method of dynamic hierarchical control designing is suggested. The results presented in this paper extend the previous work in [2].

Key words: dynamical model; hierarchical control; decentralized stabilization