U—D 分解的固定区间平滑新算法及其在飞行状态估计中的应用

史忠科　王培德
(西北工业大学自动控制系，西安)

摘要：鉴于目前固定区间平滑算法所存在的问题，本文根据 Rauch—Tung—Striebd 平滑公式，提出了一种 U—D 分解形式的固定区间平滑新算法．这种方法既有良好的数值稳定性和可靠性，又具有计算量小的优点．它比 Bierman 序列方法和 Keigo. Watanabe 的前向平滑方法都有效得多．此外，本文对状态和偏差的同时平滑进行了讨论，并把它用于实际飞行状态的估计，所得结果较理想．

关键词：固定区间平滑；状态估计；Kalman 滤波；飞行试验

1 引　言

固定区间平滑技术在工业、航空、航天及其它领域应用极广．自 60 年代以来，一系列固定区间平滑算法相继出现，其中最常用的是 Rauch—Tung—Striebel(R—T—S)平滑器．但在实际使用时，发现这一算法有两个明显的缺点：一是在协方差阵计算式中，有两个正定矩阵相减使其数值稳定性较差；二是其增益阵计算量太大，处理速度较慢[1]．这样就限制了 R—T—S 平滑算法的应用范围．1983 年，Bierman 提出了序列固定区间平滑算法，并给出了 U—D 分解形式[2]．这一方法增加了数值稳定性并减少了计算量．1986 年，Keigo. Watanabe 又提出了前向固定区间平滑算法和 U—D 分解形式[3]，进一步减少了计算量．然而上述两种算法的计算量仍很可观．为了进一步减少固定区间平滑算法的计算量，本文提出了新的 U—D 分解方法，并对状态和偏差的同时平滑进行了讨论．通过计算量比较表明，本文提出的方法比 Bierman 序列平滑、Keigo. Watanabe 前向平滑都有效得多．

2 R—T—S 平滑器的稳定形式

设线性离散系统的状态方程为

$$X_{j+1} = \Phi_{j+1,j}X_j + \Gamma_j W_j, \tag{1}$$

观测方程为

$$Z_{j+1} = H_{j+1}X_{j+1} + V_{j+1}. \tag{2}$$

其中

$$X \in R^n, W \in R^p, Z \in R^m;$$

$$E\{V_j\} = 0, E\{W_j\} = 0, E\{V_jV_k^T\} = \delta_{jk}R_j;$$

$$E\{W_jW_k^T\} = \delta_{jk}Q_j, E\{W_jV_k^T\} = 0.$$

且

$$R_j > 0, \quad Q_j \geqslant 0.$$

R—T—S 固定区间平滑公式为

$$\hat{X}_{j/N} = \hat{X}_{j/j} + G_j(\hat{X}_{j+1/N} - \hat{X}_{j+1/j}), \tag{3}$$

本文于 1989 年 3 月 28 日收到．1989 年 9 月 12 日收到修改稿．

$$G_j = P_{j/j}\Phi^T_{j+1,j}P^{-1}_{j+1/j}, \tag{4}$$

$$P_{j/N} = P_{j/j} + G_j(P_{j+1/N} - P_{j+1/j})G^T_j. \tag{5}$$

其中

$$\hat{X}_{j/j} = \hat{X}_{j/j-1} + K_j(Z_j - H_j\hat{X}_{j/j-1}),$$

$$P^{-1}_{j/j} = P^{-1}_{j/j-1} + H^T_jR^{-1}_jH_j,$$

$$\hat{X}_{j/j-1} = \Phi_{j,j-1}\hat{X}_{j-1/j-1},$$

$$K_j = P_{j/j}H^T_jR^{-1}_j,$$

$$P_{j/j-1} = \Phi_{j,j-1}P_{j-1/j-1}\Phi^T_{j,j-1} + \Gamma_jQ_j\Gamma^T_j. \tag{6}$$

由(5)式可知，两正定矩阵相减使 $P_{j/N}$ 的正定性无法保证. 为了保证计算稳定性，必须对(5)式进行适当变形，使该式中不出现相减运算.

将(4)、(6)式代入(5)中，根据矩阵反演变换可得

$$P_{j/N} = G_jP_{j+1/N}G^T_j + F_j(Q^{-1}_j + F^T_jP^{-1}_{j/j}F_j)^{-1}F^T_j. \tag{7}$$

其中

$$F_j = \Phi^{-1}_{j+1,j}\Gamma_j.$$

(4)式是三个矩阵之积，计算量较大，因此我们作如下变形. 将(6)代入(4)中，根据矩阵反演公式可得

$$G_j = (I - F_jQ^*_jF^T_jP^{-1}_{j/j})\Phi^{-1}_{j+1,j}. \tag{8}$$

其中

$$Q^*_j = (Q^{-1}_j + F^T_jP^{-1}_{j/j}F_j)^{-1}.$$

3 $U-D$ 分解的新平滑算法

为了提高计算效率和数值稳定性，对上述算法进行 U－D 分解.

设

$$P_{j/N} = U_{j/N}D_{j/N}U^T_{j/N}, \quad P_{j+1/N} = U_{j+1/N}D_{j+1/N}U^T_{j+1/N},$$

$$P_{j/j} = U_{j/j}D_{j/j}U^T_{j/j}, \quad Q^*_j = U^{-T}_{qj}D^{-1}_{qj}U^{-1}_{qj}.$$

新平滑算法的具体实现如下：

$$\begin{aligned}
&F_j \leftarrow \Phi^{-1}_{j+1,j}\Gamma_j,\\
&\Gamma_j \leftarrow U^{-1}_{j/j}F_j,\\
&U_{qj}D_qU^T_{qj} = Q^{-1}_j + \Gamma^T_jD^{-1}_{j/j}\Gamma_j,\\
&F_j \leftarrow F_jU^{-T}_{qj},\\
&\Gamma_j \leftarrow D^{-1}_{j/j}\Gamma_j,\\
&\Gamma_j \leftarrow U^{-T}_{j/j}\Gamma_j,\\
&\Gamma_j \leftarrow \Phi^{-T}_{j+1,j}\Gamma_j,\\
&\Gamma_j \leftarrow \Gamma_jU^{-T}_{qj}D^{-1}_{qj},\\
&G_j \leftarrow \Phi^{-1}_{j+1,j} - F_j\Gamma^T_j,\\
&U_{j/N}D_{j/N}U^T_{j/N} = G_jU_{j+1/N}D_{j+1/N}U^T_{j+1/N}G^T_j + F_jD^{-1}_{qj}F^T_j.
\end{aligned} \tag{9}$$

为了说明该算法有较高的效率，表 1 给出一步平滑所需计算量；表 2、表 3 和表 4 分别给出了该方法与 Bierman 序列平滑、Keigo、Watanabe 前向平滑所需计算量的比较. 由表可知，本文提出的方法大大提高了计算效率. 表中，MSS 指本文提出的方法，FPS 指 Keigo、Watanabe 前向平滑方法，SS 指 Bierman 序列平滑方法.

表 1　一步平滑所需的计算量

	加法	乘法	除法
$\Phi_{j+1,j}\Gamma_j$	$np(n-1)$	n^2p	
$U_{j/j}^{-1}F_j$	$\frac{1}{2}np(n-1)$	$\frac{1}{2}np(n-1)$	
$F_{Fj}U_{qj}^{-T}$	$\frac{1}{2}np(p1)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	
$D_{j/j}^{-1}\Gamma_j$			np
$U_{j/j}^{-T}\Gamma_j$	$\frac{1}{2}np(n-1)$	$\frac{1}{2}np(n-1)$	
$\Phi_{j+1,j}^{-T}\Gamma_j$	$np(n-1)$	n^2p	
$D_{qj}^{-1}U_{qj}^{-1}\Gamma_j$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}p(p+1)$
$\Phi_{j+1,j}^{-1}-F_j\Gamma_j^T$	n^2p	n^2p	
U_{qj},D_{qj}(MWGS)[4]	$np(p+1)+1.5p(p-1)$	$np(p+1)+2p(p-1)$	$0.5p(p-1)$
$U_{j/N},D_{j/N}$(MWGS)[4]	$1.5n^3+n^2(p-1)+0.5n$	$1.5n^3-0.5n^2+n^2p$	$0.5n(n-1)$
$X_{j/N}$	$n(n+1)$	n^2	
总计	$1.5n^3+5n^2p+n(2p^2+3p$ $+1.5)+1.5p(p-1)$	$1.5n^3+n^2(5p+0.5)$ $+n(2p^2-p)+2p(p-1)$	$np+p^2$ $+0.5n(n-1)$

表 2　一步平滑所需计算量的比较

	加法	乘法	除法
MSS	$1.5n^3+5n^2p+1.5p(p-1)$ $+n(2p^2+3p+1.5)$	$1.5n^3+n^2(5p+0.5)$ $+np(2p-1)+2p(p-1)$	$np+p^2$ $+0.5n(n-1)$
FPS[3]	$1.5n^3-0.5n+n^2$ $+(1.5n^3+0.5n^2+4n)p$	$1.5n^3+3n^2-1.5n$ $+(1.5n^3+3n^2+3.5n)p$	$(n-1)(1+3p)$
SS[3]	$1.5n^3-0.5n+n^2$ $+(1.5n^3+0.5n^2+5n)p$	$1.5n^3+3n^2-1.5n$ $+(1.5n3+3n2+4.5n)p$	$(n-1)(1+3p)$

表 3　一步平滑计算量比较举例

	$n=30,\ p=4$			$n=30,\ p=15$			$n=30,\ p=30$		
	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法
MSS	59163	59814	571	120510	121920	1110	228150	230790	2235
FPS	205665	216375	377	657435	692730	1334	1273485	1342305	2639
SS	205785	216495	377	657885	693180	1334	1274385	1343025	2639

表 4　平滑所需时间更新计算量的比较

	加法	乘法	除法
MSS	$1.5n^3+0.5n^2(p+1)-0.5np$	$1.5n^3+n^2(p+2)-0.5n(p+2)$	$n-1$
FPS[3]	$1.5n^3+0.5n^2(2m+1)+n(m+p)$	$1.5n^3+n^2(m+2)+n(2m+p-0.5)$	$n-1$
SS	$1.5n^3+0.5n^2(4p+1)$	$1.5n^3+2n^2(p+1)+n(2p-0.5)$	$n(3p+1)-(p+1)$

由表4可知，当 $p\leqslant m$ 时，MSS所需计算量最少；当 $p\leqslant m$ 时，MSS时间更新的计算量可能比FPS的计算量大，但不会多出 $n^2(p-m)$，而此时MSS平滑所需计算量比FPS所需计算量约少 $1.5n^3p$. 综合考虑表2、表4，MSS方法最有效.

MSS方法所需存贮量较少，只需存贮 $G_j, F_j, D_{qj}, \hat{X}_{j/j}, \hat{X}_{j+1/j}$. FPS和SS方法不仅需存贮 $Q_j, \Phi_{j+1,j}, \Gamma_j$，还需考虑文献[3]中表6的存贮量，可得三种平滑方法一步平滑所需的存贮量比较，如表5所示.

表 5　一步平滑所需的存贮量

方法	MSS	FPS	SS
存贮量	$n^2+(n+1)p+2n$	$n^2+p(2n+3)$	$n^2+2p(n+1)+n$

4　状态和偏差的平滑问题

设系统的状态方程为

$$X_{j+1} = \Phi_{j+1,j}X_j + \Gamma_j W_j + B_j b_j,$$
$$b_{j+1} = b_j. \tag{10}$$

其中 b 为偏差向量，X, W 假定同(1)式.

根据R—T—S固定区间平滑公式可得

$$\hat{X}_{j/N} = \hat{X}_{j/j} + G_{11}(\hat{X}_{j+1/N} - \hat{X}_{j+1/j}) + G_{12}(b_{j+1/N} - b_{j+1/j}), \tag{11}$$

及
$$b_{j/N} = b_{j+1/N}. \tag{12}$$

其中
$$G_j = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

设
$$P_{j/j} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^T & 0 \\ u_{12}^T & u_{22}^T \end{bmatrix},$$

$$P_{j+1/N} = \begin{bmatrix} u_{11,j+1/N} & u_{12,j+1/N} \\ 0 & u_{22,j+1/N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1,j+1/N} & 0 \\ 0 & D_{2,j+1/N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11,j+1/N}^T & 0 \\ u_{12,j+1/N}^T & u_{22,j+1/N}^T \end{bmatrix},$$
$$j = 1, 2, \cdots, N,$$

可得

$$G_{11} = \Phi_{j+1,j}^{-1} - A_j\Phi_{j+1,j}^{-1},$$
$$G_{12} = -G_{11}B_j + A_j u_{12} u_{22}^{-1},$$
$$u_{11,j/N}D_{1,j/N}u_{11,j/N}^T = G_{11}u_{11,j+1/N}D_{1,j+1/N}u_{11,j+1/N}^T G_{11}^T + F_{1j}Q_j^* F_{1j}^T,$$

$$u_{12,j/N} = G_{11}u_{12,j+1/N} + G_{12}u_{22,j+1/N},$$
$$u_{22,j/N} = u_{22,j+1/N},$$
$$D_{2,j/N} = D_{2,j+1/N}.$$

其中

$$A_j = F_{1j}Q_j^* F_{1j}^T u_{11}^{-T} D_1^{-1} u_{11}^{-1},$$
$$Q_j^* = (Q_j^{-1} + F_{1j}^T u_{11}^{-T} D_1^{-1} u_{11}^{-1} F_{1j})^{-1}. \tag{13}$$

5 MSS 方法在飞行试验中的应用

飞机纵向运动的方程为

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -qw + n_x g + g\sin\theta, \\ \dot{w} &= qu + n_z g + g\cos\theta, \\ \dot{\theta} &= q, \\ \dot{h} &= u\sin\theta - w\cos\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

观测量选高度 h，空速 V_0，迎角 α，俯仰角 θ；输入为过载 n_x, n_z 和俯仰角速度 q. 考虑这些量的系统偏差，尺度因子误差和随机误差后，将(14)式积分并离散化可得

$$X_{k+1} = f(X_k, U_{m,k}, b, k) + \Gamma_k W_k, \tag{15}$$
$$Y_{m,k+1} = Y_{c,k+1}(X_{k+1}, b, k+1) + \eta_{k+1}. \tag{16}$$

其中

$$X = [u, w, \theta, h]^T, Y_m = [h_m, V_{0m}, \alpha_m, \theta_m]^T$$

b 为尺度因子误差和系统偏差向量；W_k, η_k 为随机噪声向量，并假设其统计特性如(1)式.

将(15)、(16)式绕标称状态线性化得

$$\begin{aligned} \delta X_{k+1} &= A_{k+1,k}\delta X_k + B_k b_k + \Gamma_k W_k \\ b_{k+1} &= b_k \\ \delta Y_{m,k+1} &= H_{k+1}\delta X_{k+1} + C_{k+1} b_k + \eta_{k+1} \end{aligned} \tag{17}$$

式中

$$\delta X = X - X^*, \delta Y_m = Y_m - Y^*$$

X^* 和 Y^* 分别为标称状态和标称测量向量；A, B, H, C 均为绕标称状态线性化所得的系数阵.

根据(17)式进行滤波，然后可根据(11)～(13)式进行平滑，所得结果较好. 表 6 给出了实际飞行数据测量噪声 $\eta = Y_m - Y_c$ 的标准差估计.

表 6　测量噪声方差估计

	$\hat{\eta}_{h(m)}$	$\hat{\eta}_{V(m/s)}$	$\hat{\eta}_{\alpha(deg)}$	$\hat{\eta}_{\theta(deg)}$
滤波	0.1532117	2.874358×10^{-3}	6.654107×10^{-3}	7.535859×10^{-4}
平滑	0.09019084	1.438862×10^{-3}	4.364511×10^{-3}	3.332175×10^{-4}

6 结束语

本文提出的 U－D 分解固定区间平滑方法数值稳定性好，计算效率高. 滤波和平滑所需计算量远小于 Bierman 序列方法和 Keigo. Watanabe 前向平滑方法，存贮量也最小. 特别当状态维数较高时，更能显示出它的优越性.

参考文献

[1] Bierman, G. J.. Sequential Square—root Filtering and Smoothing of Discrete Linear Systems. Automatica, 1974, 10(1): 147—158

[2] Bierman, G. J.. A New Computationally Efficient Fixedinterval Discreta—time Smoother. Automatica, 1983, 19(5): 503—511

[3] Keigo. Watanabe. A New Forward—pass Fixed—interval Smoother Using the U—D Information Matrix Factorization. Automatica, 1986, 22(4): 465—475

[4] Bierman, G. J., Thornton, C. L.. Numerical Comparison of Kalman Filter Algorithms. Automatica, 1977, 13(1): 23—35

A New U—D Factorization—based Fixed—interval Smoother and Application to Flight Test

Shi Zhongke, Wang Peide

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xian)

Abstract: In this paper, a new computationally efficient U—D factorization—based fixed—interval smoother is developed by using Rauch—Tung—Striebel smoother. This algorithm is of both numerical stable and computationally efficient since numerically superior modified weighted Gram—Schmidt method is used and computationally burdensome covariance matrix inversion does not involved. The results of the comparison of operation counts show that the method presented in this paper is much more efficient than Bierman rank 2 or Keigo. Watanabe forward—pass smoothing algorithm. Moreover, state and bias smoothing is disccussed and this method has been applied to the determination of flight states and instrumentation errors.

Key words: fixed—interval smoother; state estimation; kalman filter; flight test