第 16 卷第 2 期
1999 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.2
Apr., 1999

灰色离散系统的稳定性 *

黄廷祝　成孝予　蒲和平
(电子科技大学应用数学系·成都,610054)

摘要:讨论灰色离散系统 $x(k+1) = A(\otimes)x(k), x(0) = x_0$ 的渐近稳定性.用特殊矩阵分析方法和技术,仅用矩阵的元素,获得了几个新的简单实用的判据.

关键词:灰色离散系统;渐近稳定性;矩阵;特征值

The Stability of Grey Discrete Systems

Huang Tingzhu, Cheng Xiaoyu and Pu Heping
(Department of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China·Chengdu, 610054, P.R.China)

Abstract: In this paper, the sability of grey discrete systems is studied. Several simple practical criteria for the stability are obtained, which use only the entries of matrices.

Key words: grey discrete system; stability; matrix; eigenvalue

1 引言(Introduction)

考虑灰色离散系统

$$x(k+1) = A(\otimes)x(k), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $A(\otimes)$ 为 n 阶实矩阵,其元素 $\otimes_{ij}(i,j = 1,\cdots,n)$ 不确知,但知下界和上界 p_{ij} 和 q_{ij},即

$$p_{ij} \leqslant \otimes_{ij} \leqslant q_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,n.$$

记 $N = \{1,\cdots,n\}, P = (p_{ij})_{n\times n}, Q = (q_{ij})_{n\times n}$, $N[P,Q] = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}: p_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant q_{ij}, i,j \in N\}$,称 $N[P,Q]$ 为区间矩阵.

定义　设 n 阶实阵 A 满足谱半径 $\rho(A) < 1$,则称 A 是离散稳定的;若 $\forall A \in N[P,Q]$, A 离散稳定,则称区间矩阵 $N[P,Q]$ 离散稳定;若区间矩阵 $N[P,Q]$ 离散稳定,则称灰色离散系统(1)渐近稳定[1,3].

对于系统(1)的稳定性,[3]等采用李亚谱诺夫 V 函数方法,得到一些充分条件,[4]利用矩阵特征值 Gerschgorin 圆盘定理等给出一些代数判据,但条件较难满足或使用不便.

设 $m_{ij} = \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\}, i,j \in N, M = (m_{ij})_{n\times n}$,[4,5]的主要结果为:

1) 若

$$\sum_{i,j} m_{ij}^2 \leqslant 1, \tag{2}$$

则系统(1)渐近稳定;

2) 若存在正数 $r_1,\cdots,r_n$,使得

$$\max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j m_{ij}}{r_i} < 1, \tag{3}$$

则系统(1)渐近稳定.

本文试利用特殊矩阵分析方法和技术获得几个(1)渐近稳定的简单实用的充分条件,允许范数 $\|M\|_\infty$ 或 $\|M\|_1 > 1$,使用范围较广泛.

2 主要结果(Main results)

设 $N = N_1 \oplus N_2 = \tilde{N}_1 \oplus \tilde{N}_2$ 为 N 的任意分割,即 $N_1, N_2, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 \subset N$,且 $N_1 \cap N_2 = \emptyset, N_1 \cup N_2 = N; \tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2 = \emptyset, \tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2 = N$,记

$$a_i = \sum_j m_{ij}, \quad \alpha_i = \sum_{j\in N_1} m_{ij}, \quad \beta_i = \sum_{j\in N_2} m_{ij},$$

$$\tilde{a}_i = \sum_j m_{ji}, \quad \tilde{\alpha}_i = \sum_{j\in \tilde{N}_1} m_{ji}, \quad \tilde{\beta}_i = \sum_{j\in \tilde{N}_2} m_{ji}.$$

定理 1　若满足下列条件之一:

1) $a_i < 1 \quad (i \in N)$;

或

2) 设 $a_i \geqslant 1(i \in N_1 \neq \emptyset), a_j < 1(i \in N_2 \neq \emptyset)$,如果

$$a_i(1-\beta_j) - \sum_{t\in N_1} m_{it}a_t + \beta_j\sum_{t\in N_1} m_{it}a_t - \beta_i\sum_{t\in N_1} m_{jt}a_t > 0, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2, \tag{4}$$

---

* 四川省青年科技基金(93003)资助项目.

本文于 1997 年 6 月 3 日收到. 1998 年 2 月 19 日收到修改稿.

则系统(1)渐近稳定.

证 若满足条件1),则显然有 $\rho(M)<1$,又,$\forall A\in N[P,Q]$,$|a_{ij}|\leqslant m_{ij}$,$i,j\in N$,于是据非负矩阵性质[6]有 $\rho(A)\leqslant\rho(|A|)\leqslant\rho(M)$,因而 $\rho(A)<1$,结论成立.

若满足条件2),由式(4)有

$$(a_i-\sum_{t\in N_1}m_{it}a_t)(1-\beta_j)>\beta_i\sum_{t\in N_1}m_{jt}a_t,\quad i\in N_1,\quad j\in N_2,\tag{5}$$

因 $a_j<1$,$j\in N_2$,所以 $1-\beta_j>a_j\geqslant 0$,于是据式(5)得

$$L_i\triangleq\frac{a_i-\sum\limits_{t\in N_1}m_{it}a_t}{\beta_i}>l_j\triangleq\frac{\sum\limits_{t\in N_1}m_{jt}a_t}{1-\beta_j}\geqslant 0,\quad i\in N_1,\quad j\in N_2.$$

(若 $\beta_i=0$,则记 $L_i=+\infty$),因而 $\min\limits_{i\in N_1}L_i>\max\limits_{j\in N_2}l_j$,因为 $\max\limits_{i\in N_2}l_j$ 为有限实数,所以存在正数 d 使得

$$\min_{i\in N_1}L_i>d>\max_{j\in N_2}l_j\geqslant 0.\tag{6}$$

构造 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,其中

$$d_i=\begin{cases}a_j, & i\in N_1,\\ d, & i\in N_2.\end{cases}$$

设 $B=(b_{ij})\triangleq D^{-1}MD$,$b_{ij}=d_jm_{ij}/d_i$,$i,j\in N$,则 $\forall i\in N_1$:

$$\sum_j|b_{ij}|=\sum_j b_{ij}=\frac{1}{a_i}\sum_{t\in N_1}m_{it}a_t+\frac{d}{a_i}\sum_{t\in N_2}m_{it}=\frac{1}{a_i}(\sum_{t\in N_1}m_{it}a_t+d\beta_i).\tag{7}$$

当 $\beta_i=0$ 时,式(5)和 $1-\beta_j>0$,$j\in N_2$,推得

$$a_i-\sum_{t\in N_1}m_{it}a_t>0,\quad i\in N_1,$$

所以 $\frac{1}{a_i}\sum\limits_{t\in N_1}m_{it}a_t<1$.据此及(7)式得

$$\sum_j|b_{ij}|<1,\quad i\in N_1.$$

当 $\beta_i\neq 0$ 时,由 L_i 的定义和式(5),(6)有

$$\sum_j|b_{ij}|=\sum_j b_{ij}<\frac{1}{a_i}(\sum_{t\in N_1}m_{it}a_t+a_i-\sum_{t\in N_1}m_{it}a_t)=1,\quad i\in N_1.$$

$\forall j\in N_2$:

由 l_j 定义和式(5)有

$$\sum_t|b_{jt}|=\sum_t b_{jt}=\sum_{t\in N_1}b_{jt}+\sum_{t\in N_2}b_{jt}=\frac{1}{d}\sum_{t\in N_1}m_{jt}a_t+\beta_j<1-\beta_j+\beta_j=1,$$

故 $\forall i\in N$,$\sum\limits_t|b_{it}|<1$.因而

$$\|B\|_\infty=\max_{i\in N}\sum_t|b_{it}|<1,$$

$$\rho(B)\leqslant\|B\|_\infty<1.$$

又 $B=D^{-1}MD$,所以 $\rho(M)<1$,故 $\forall A\in N[P,Q]$,由于 $|a_{ij}|\leqslant m_{ij}$,$i,j\in N$,据非负矩阵性质有 $\rho(A)\leqslant\rho(|A|)\leqslant\rho(M)<1$. 证毕.

将定理1用于转置矩阵,立刻有

定理1′ 若满足下列条件之一:

1) $\tilde{a}_i<1$,$(i\in N)$;

或

2) 设 $\tilde{a}_i\geqslant 1(i\in\tilde{N}_1\neq\varnothing)$,$\tilde{a}_j<1(j\in\tilde{N}_2\neq\varnothing)$,如果

$$\tilde{a}_i(1-\tilde{\beta}_j)-\sum_{t\in\tilde{N}_1}m_{ti}\tilde{a}_t+\tilde{\beta}_j\sum_{t\in\tilde{N}_1}m_{ti}\tilde{a}_t-\tilde{\beta}_i\sum_{t\in\tilde{N}_1}m_{tj}\tilde{a}_t>0,\quad i\in\tilde{N}_1,\quad j\in\tilde{N}_2,$$

则系统(1)渐近稳定.

本文另一主要结果为

定理2 若满足下列条件之一:

1) $a_i<1$,$(i\in N)$;

或

2) 设 $a_i\geqslant 1(i\in N_1\neq\varnothing)$,$a_j<1(j\in N_2\neq\varnothing)$,如果

$$1-\alpha_i-\sum_{t\in N_2}m_{it}a_t>0,\quad i\in N_1,\tag{8}$$

则系统(1)渐近稳定.

证 若满足条件1),则显然有 $\rho(M)<1$,又 $\forall A\in N[P,Q]$,$|a_{ij}|\leqslant m_{ij}$,$i,j\in N$,于是据非负矩阵性质有 $\rho(A)\leqslant\rho(|A|)\leqslant\rho(M)$,因而 $\rho(A)<1$,结论成立.

若满足条件2),由式(8)有

$$h_i:\triangleq\frac{1}{\beta_i}(1-\alpha_i-\sum_{t\in N_2}m_{it}a_t)>0,\quad i\in N_1.$$

若 $\beta_i=0$,则取 $h_i=+\infty$.于是 $\min\limits_{i\in N_1}h_i>0$.据此,总存在正数 e 使得

$$\min_{i\in N_1}h_i>e>0,\tag{9}$$

构作对角阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$,其中

$$d_i=\begin{cases}1, & i\in N_1,\\ e+a_i>0, & i\in N_2.\end{cases}$$

记 $R=(r_{ij})=D^{-1}MD$,则 $r_{ij}=d_jm_{ij}/d_i$,$i,j\in N$,这样,$\forall i\in N_1$:

$$\sum_j |r_{ij}| = \sum_{t\in N_1} |r_{it}| + \sum_{t\in N_2} |r_{it}| = \sum_{t\in N_1} m_{it} + \sum_{t\in N_2}(e+a_t)m_{it} = \alpha_i + e\beta_i + \sum_{t\in N_2} m_{it}a_t. \tag{10}$$

若 $\beta_i = 0$, 由假设和式(10)有

$$\sum_j |r_{ij}| = \alpha_i + \sum_{t\in N_2} m_{it}a_t < 1.$$

若 $\beta_i \neq 0$,由式(9),(10)得

$$\sum_j |r_{ij}| < \alpha_i + (\min_{i\in N_1} h_i)\beta_i + \sum_{t\in N_2} m_{it}a_t \leqslant \alpha_i + \frac{1}{\beta_i}(1-\alpha_i-\sum_{t\in N_2} m_{it}a_t)\beta_i + \sum_{t\in N_2} m_{it}a_t = 1.$$

$\forall j \in N_2$:

$$\sum_t |r_{jt}| = \sum_{t\in N_1} \frac{m_{jt}}{e+a_j} + \sum_{t\in N_2} \frac{e+a_t}{e+a_j} m_{jt} = \frac{\alpha_j}{e+a_j} + \frac{1}{e+a_j}\sum_{t\in N_2}(e+a_t)m_{jt} = \frac{1}{e+a_j}(\alpha_j + e\beta_j + \sum_{t\in N_2} m_{jt}a_t). \tag{11}$$

由于 $a_t < 1, t\in N_2$,因而 $\alpha_j + \sum_{t\in N_2} m_{jt}a_t \leqslant \alpha_j + \sum_{t\in N_2} m_{jt} = \alpha_j + \beta_j = a_j$,即

$$\alpha_j + \sum_{t\in N_2} m_{jt}a_t - a_j \leqslant 0, \tag{12}$$

据 $a_j < 1, j\in N_2$,有

$$1-\beta_j \geqslant 1 - a_j > 0, \tag{13}$$

所以,由 $e>0$ 和式(12),(13)得 $e > (\alpha_j + \sum_{t\in N_2} m_{jt}a_t - a_j)/(1-\beta_j)$,即

$$\alpha_j + e\beta_j + \sum_{t\in N_2} m_{jt}a_t < e + a_j. \tag{14}$$

这样,由式(11),(14)得 $\sum_t |r_{jt}| < 1$.故 $\forall i\in N$, $\sum_t |r_{it}| < 1$.因而

$$\|R\|_\infty = \max_{i\in N}\sum_t |r_{it}| < 1,$$

$$\rho(R) \leqslant \|R\|_\infty < 1.$$

又 $R = D^{-1}MD$,所以 $\rho(M) < 1$.故 $\forall A \in N[P,Q]$, $|a_{ij}| \leqslant m_{ij}, i,j\in N$,据非负矩阵性质有

$$\rho(A) \leqslant \rho(|A|) \leqslant \rho(M) < 1.$$

证毕.

类似于定理1′,将定理2用于转置矩阵,也可得到类似的结果定理2′(略).

引理[6] 设 A 为 n 阶矩阵,$B = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$, A^{T} 表示 A 的转置,则

$$\min_m \lambda_m(B) \leqslant \mathrm{Re}\lambda_i(A) \leqslant \max_m \lambda_m(B), \quad i\in N,$$

其中,$\lambda_i(B)$,$\lambda_i(A)$ 分别为 B 和 A 的特征值.

于是,由定理1(或定理1′)、定理2(或定理2′)和引理可得

定理3 若 $C = \frac{1}{2}(M + M^{\mathrm{T}})$ 满足定理1(或定理1′)或定理2(或定理2′)的条件,则系统(1)渐近稳定.

证 由引理有

$$\min_m \lambda_m(C) \leqslant \mathrm{Re}\lambda_i(M) \leqslant \max_m \lambda_m(C), \quad i\in N,$$

显然

$$|\mathrm{Re}\lambda_i(M)| \leqslant \rho(C), \quad i\in N.$$

因 M 为非负矩阵,由著名的Perron-Frobenius定理[6]知存在 M 的正特征值 $\lambda = \rho(M)$,则

$$\rho(M) \leqslant \rho(C).$$

据定理1,2的证明知

$$\rho(C) < 1,$$

因而 $\rho(M) \leqslant \rho(C) < 1$,故 $\forall A\in N[P,Q]$,因 $|a_{ij}| \leqslant m_{ij}, i,j\in N$,由非负矩阵性质[6]有

$$\rho(A) \leqslant \rho(|A|) \leqslant \rho(M) < 1.$$

证毕.

注 易见,这里的定理1,2(或1′,2′)允许 $\|M\|_\infty$(或 $\|M\|_1$) > 1,从而有较广泛的使用范围.

3 例子(Examples)

下面给出具体例子说明本文结果的应用和优越性.

例1 考虑

$$x(k+1) = (\otimes)_{4\times4}x(k),$$

其中

$\otimes_{11} = \otimes_{22} = \otimes_{33} = \otimes_{44} = 0$,

$\otimes_{12} \in [-0.2, 0.3]$, $\otimes_{13} \in [0.2, 0.6]$,

$\otimes_{14} \in [0, 0.8]$, $\otimes_{21} \in [-0.2, 0.1]$,

$\otimes_{23} \in [0, 0.3]$, $\otimes_{24} \in [-0.2, 0.2]$,

$\otimes_{31} \in [-0.3, 0.1]$, $\otimes_{32} \in [-0.1, 0.1]$,

$\otimes_{34} \in [0, 0.3]$, $\otimes_{41} \in [-0.1, 0]$,

$\otimes_{42} \in [0.1, 0.2]$, $\otimes_{43} \in [-0.2, 0.3]$.

于是

$$M = (m_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\| M \|_{\infty}, \quad \| M \|_{1} > 1.$$

取 $N_1 = \{1\}, N_2 = \{2,3,4\}$，则 $a_1(1-\beta_2) - \beta_1 m_{21} a_1 = 1.7 \times 0.16 > 0, a_1(1-\beta_3) - \beta_1 m_{31} a_1 = 1.7 \times 0.09 > 0, a_1(1-\beta_4) - \beta_1 m_{41} a_1 = 1.7 \times 0.33 > 0$，即满足定理1的2)，故系统渐近稳定．然而，式(2)不满足，且式(3)是很难验证的．

例 2　考虑

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \otimes_{11} & \otimes_{12} \\ \otimes_{21} & \otimes_{22} \end{pmatrix} x(k),$$

其中，$\otimes_{11} \in [0.1,0.6]$，$\otimes_{12} \in [0.2,0.3]$，$\otimes_{21} \in [0.1,0.3]$，$\otimes_{22} \in [0.3,0.7]$，

$$M = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix},$$

$N_1 = \{1\}, N_2 = \{2\}, a_1 = 0.9, a_2 = 1, \beta_1 = m_{12} = 0.3, \beta_2 = m_{22} = 0.7$，由 $a_1(1-\beta_2) - m_{11}a_1 + \beta_2 m_{11} a_1 - \beta_1 m_{21} a_1 = 0.027 > 0$ 知满足定理1的2)，故系统渐近稳定．然而，显然 $\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}^2 = 1.03 > 1$，即不满足式(2) 即 $\| M \|_2 > 1$．

例 3　考虑

$$x(k+1) = (\otimes)_{4\times4} x(k),$$

其中

$$\otimes_{11} = \otimes_{22} = \otimes_{33} = \otimes_{44} = 0,$$
$$\otimes_{12} \in [-0.2,1], \ \otimes_{13} \in [-0.2,0.3],$$
$$\otimes_{14} \in [0,0.1], \ \otimes_{21} \in [0,0.3],$$
$$\otimes_{23} \in [-0.1,0.1], \ \otimes_{24} \in [-0.1,0.2],$$
$$\otimes_{31} \in [-0.5,0.6], \ \otimes_{32} \in [-0.3,0],$$
$$\otimes_{34} \in [0,0.3], \ \otimes_{41} \in [-0.5,0.8],$$
$$\otimes_{42} \in [0,0.2], \ \otimes_{43} \in [-0.1,0.3].$$

于是

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\| M \|_{\infty}, \quad \| M \|_{1} > 1.$$

取 $N_1 = \{3,4\}, N_2 = \{1,2,\}$，据 $1 - a_3 - (m_{31}a_1 + m_{32}a_2) = 0.7 - 0.54 > 0, 1 - a_4 - (m_{41}a_1 + m_{42}a_2) = 0.7 - 0.6 > 0$ 知定理2的2)满足，故系统渐近稳定．另，显然不满足式(2) 即 $\| M \|_2 > 1$．

参考文献(References)

1　王联，王慕秋．常差分方程．乌鲁木齐市：新疆大学出版社，1991

2　J P 拉萨尔(廖晓昕等译)．动力系统的稳定性．武汉：华中工学院出版社，1983

3　周朝顺，邓聚龙，阙泰林．灰色离散系统稳定性的充分判据．华中理工大学学报，1988，16(4)：141－145

4　彭晓林，罗晓．灰色离散系统稳定及不稳定的代数判据．科学通报，1991，36(16)：1273－1274

5　陈菊芳．非线性灰色离散系统零解的稳定性．应用数学学报，1995，18(1)：123－128

6　李正良，钟守铭，黄廷祝．矩阵理论及应用．成都：电子科技大学出版社，1996

本文作者简介

黄廷祝　1964年生．于1986年，1992年在西安交通大学计算数学专业获学士、硕士学位，现为电子科技大学应用数学系教授．主要研究兴趣为数值代数，矩阵论及应用和稳定性理论．

成孝予　1948年生．1977年毕业于电子科技大学，现为电子科技大学应用数学系副教授．研究兴趣为最优化方法和稳定性理论．

蒲和平　1957年生．1989年在四川大学数学系获硕士学位，现为电子科技大学应用数学系副教授．研究兴趣为组合数学，神经网络．