鲁棒设计中的状态空间模型 *

王广雄　王晓峰　毛　刚
(哈尔滨工业大学自动控制系·哈尔滨, 150001)

摘要: 本文研究了参数摄动时系统状态空间模型的描述,指出了当参数呈线性关系摄动时,可用 $A+\Delta A$ 来描述,一般说来应该用线性分式变换(LFT). LFT 是描述不确定对象的最通用方法.

关键词: 不确定性; 参数摄动; 线性分式变换; 鲁棒性

The State-Space Model in Robust Design

Wang Guangxiong, Wang Xiaofeng and Mao gang
(Department of Automatic Control, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: This paper presents the state-space model of systems with parameter perturbations. It is pointed out that the perturbed model may be described as $A+\Delta A$ if the parameters enter linearly. Generally speaking, Linear Fractional Transformation (LFT) is the most common method for description of uncertain plants.

Key words: uncertainty; parameter perturbation; Linear Fractional Transformation; robustness

1 引言(Introduction)

当前,一些讨论参数摄动的文章常以状态方程中矩阵的摄动作为出发点,例如设状态 A 摄动后为 $A+\Delta A$,并对不确定性 ΔA 加一些范数界限制[2]. 所谓范数界限制,实际上是认为不确定性与 A 阵中各元素之间有线性关系. 但实际问题中的参数与出现在状态方程中各矩阵的系数之间并不都呈线性关系. 因此,从应用的角度来看,上述的一些理论就有一定的局限性.

对实际的设计问题来说. 对象的方程式不应该事先规定其形式,例如不应该事先规定摄动后的 A 为 $A+\Delta A$. 对象的数学模型应根据实际的运动方程式来建立,利用所得的方程式再归纳成设计或分析中所用的数学模型.

本文以一 Benchmark 问题中的对象为例,来说明参数摄动下对象模型的建立及其相关的问题.

2 Benchmark 问题的数学模型(Mathematical model of the benchmark problem)

图 1 所示的小车——弹簧 Benchmark 问题近年来受到了众多学者广泛研究[2].

该系统的运动方程式为:

$$m_1\ddot{x}_1+k(x_1-x_2)=u(t), \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2+k(x_2-x_1)=0, \tag{2}$$

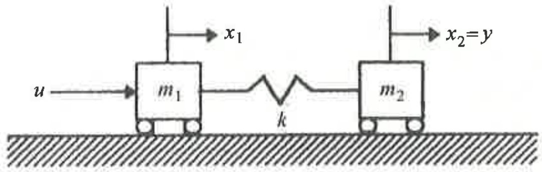

图 1　Benchmark问题

Fig. 1　The benchmark problem

式中, m_1, m_2, x_1, x_2, k 分别为两个小车的质量、位移、弹簧的弹性系数, u 为控制输入, $y=x_2$ 为输出.

设 $x_3=\dot{x}_1, x_4=\dot{x}_2, x=[x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4]^{\mathrm{T}}$,则可得对应的状态空间方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}, \tag{3}$$

式中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0\\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$C=[0\quad 1\quad 0\quad 0]. \tag{4}$$

设 m_1, m_2 和 k 有摄动:

$$m_1=m_{10}(1+w_{m1}\delta_{m1}),$$

* 国家教委高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(96021314).
本文于 1997 年 7 月 31 日收到. 1998 年 6 月 15 日收到修改稿.

$$m_2 = m_{20}(1 + w_{m2}\delta_{m2}),$$
$$k = k_0(1 + w_k\delta_k).$$

其中 m_{10}, m_{20}, k_0 分别为质量和弹性系数的名义值，$\delta_{m1}, \delta_{m2}, \delta_k$ 为规范化后的摄动，w_{m1}, w_{m1}, w_k 为相应的摄动权.

有摄动时，以式(1) 为例，要改成：

$$m_{10}(1+w_{m1}\delta_{m1})\ddot{x}_1 + k_0(1+w_k\delta_k)(x_1 - x_2) = u.$$

引入与摄动对应的变量 $z = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^{\mathrm{T}}$ 和 $v = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^{\mathrm{T}}$：

$$\begin{aligned} z_1 &= k_0(x_1 - x_2), \quad z_2 = \dot{x}_3, \quad z_3 = \dot{x}_4. \\ v_1 &= \delta_k z_1, \quad v_2 = \delta_{m1} z_2 \quad v_3 = \delta_{m2} z_3. \end{aligned} \tag{5}$$

或者写成更为紧凑的形式：

$$v = \Delta z, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\delta_k, \delta_{m1}, \delta_{m2}). \tag{6}$$

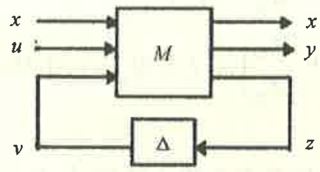

图 2　系统模型的线性分式变换表示

Fig. 2　LFT description of the system model

这时系统的状态空间模型可整理成图 2 所示的 M 阵和摄动阵 Δ 组成的线性分式变换关系. 其中 M 阵对应的输入输出关系为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix}, \tag{7}$$

式中的 M 阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_0}{m_{10}} & \dfrac{k_0}{m_{10}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{m_{10}} & -\dfrac{w_k}{m_{10}} & -w_{m1} & 0 \\ \dfrac{k_0}{m_{20}} & -\dfrac{k_0}{m_{20}} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{w_k}{m_{20}} & 0 & -w_{m2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_0}{m_{10}} & \dfrac{k_0}{m_{10}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{m_{10}} & -\dfrac{w_k}{m_{10}} & -w_{m1} & 0 \\ \dfrac{k_0}{m_{20}} & -\dfrac{k_0}{m_{20}} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{w_k}{m_{20}} & 0 & -w_{m2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

用线性分式变换表示的系统方程式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = F_l(M, \Delta) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \tag{9}$$

式中的下角标 l 表示是下线性分式变换，即图 2 中的 Δ 块处于 M 块的下方. 线性分式变换 $F_l(M,\Delta)$ 的展开式见下面的式(10).

将式(9) 与式(3) 进行比较，可见线性分式变换推广了传递函数和其状态空间实现的概念，使之可以包括不确定性.

从本节的例子中可以看到，对象的数学模型并不是先规定其结构形式的，而是根据运动方程列写出来的. 在上面的推导过程中并没有限定是哪一个参数摄动，即上面的推导是带有普遍性的，最后得到一个 LFT 描述的模型. 因此可以说，如果考虑一个实际的参数摄动问题，用 LFT 来描述对象应该是一种更为普遍的描述方式.

从式(7)，(8) 还可以看到，线性分式变换中的 M 阵虽然看起来复杂了一些，但只是增加了状态方程中的输入输出项，并没有增加状态变量 x 的维数，也就是说并没有增加模型的阶次.

3　参数呈线性关系时的状态空间模型(State space model with linearly dependent parameters)

现在来讨论一种特殊的摄动情况，即参数中只有弹性系数 k 有摄动，注意到这个 k 与状态方程式中的系数是成线性关系的[见式(4)].

将式(7) 中的线性分式变换 $F_l(M,\Delta)$ 展开，这时其中的 M 阵是按下列的虚线进行分块的，即

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$

对应的 $F_l(M,\Delta)$ 为：

$$F_l(M,\Delta)=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M_{13}\\ M_{23}\end{bmatrix}\Delta(I-M_{33}\Delta)^{-1}[M_{31}\quad M_{32}]. \tag{10}$$

由于现在只考虑系数 k 的摄动,故式(6)的摄动块为:

$$\Delta=\mathrm{diag}(\delta_k,0,0). \tag{11}$$

将式(11)代入式(10),得

$$\begin{bmatrix}M_{13}\\ M_{23}\end{bmatrix}\Delta(I-M_{33}\Delta)^{-1}[M_{31}\quad M_{32}]=\left[\begin{array}{cccc:c}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{k_0w_k\delta_k}{m_{10}} & \dfrac{k_0w_k\delta_k}{m_{10}} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{k_0w_k\delta_k}{m_{20}} & -\dfrac{k_0w_k\delta_k}{m_{20}} & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]. \tag{12}$$

比较式(8)和式(4)可知,式(10)中的第一项

$$\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix},$$

而从式(12)可以看出,式(10)的第二项相当于只有 A 阵的系数存在摄动 ΔA,且 ΔA 与 δ_k 成线性关系.所以当状态方程的系数与实际物理系统的参数呈线性关系时,参数摄动下的对象模型可简化为 $A+\Delta A$ 模型.当然,如果只有参数 k 的摄动,这个 ΔA 也可以从式(4)直接写出.

4 结论(Conclusion)

对于参数摄动,当实际物理系统的参数是以线性关系进入到状态方程式中的各系数时,摄动对象模型为 $A+\Delta A$.对于更一般情况,参数摄动的对象的模型应该用线性分式变换来描述.这里要说明的是,并不是指 A 阵中的系数,例如 a_{ij},从形式上能否分开成 $a_{ij}+\Delta a_{ij}$.因为这里讨论摄动模型的最终目的是要用于系统的鲁棒设计和分析,而现有的各种鲁棒设计理论都要求摄动部分中的各个摄动量都是线性的,所以只有当实际物理系统的参数是以线性关系出现在状态阵的系数中时,该参数摄动时的对象模型才用 $A+\Delta A$ 来描述.一般情况下,状态阵中的系数并不都是实际物理系统参数的线性组合,因此,在鲁棒设计中参数摄动的对象就得用LFT来描述.

参考文献(References)

1 Doyle J, Packard A and Zhou K. Review of LFTs, LMIs, and μ. Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, 1991, 1227 – 1232

2 Wang Y J, Shieh L S and Sunkel J W. Observer-based robust-H_∞ control laws for uncertain linear systems. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1992, 15(5): 1125 – 1133

本文作者简介

王广雄 见本刊1999年第2期第240页.

王晓峰 1964年生.1989年哈尔滨理工大学硕士研究生毕业,现为哈尔滨工业大学博士研究生.研究方向为 H_∞ 控制理论及应用.

毛 刚 1972年生.原为哈尔滨工业大学硕士研究生,现为清华大学精密仪器与机械学系博士研究生.研究方向为 H_∞ 控制理论及应用.