对称非线性系统的反馈解耦

李中华　张嗣瀛
(东北工学院自动控制系·沈阳,110006)

摘要：本文用微分几何方法讨论具有对称性的非线性系统的反馈解耦问题,给出了问题可解的充要条件.从条件可以看出,我们的结果较不具对称性的情况简单,从而说明,具有对称性的系统不仅具有较好的系统结构,而且还具有其它一些较好的性质.

关键词：对称性;导出分布;反馈解耦

1 引　言

控制系统的解耦问题是一类具有实际意义的问题.近来,利用微分几何方法,对于仿射非线性系统的解耦问题进行了较充分的研究,[1]给出了仿射非线性系统反馈解耦问题可解的充要条件.

系统的对称性是物理学中普遍存在的问题,近来在控制领域受到重视.[2]首次给出了对称非线性系统的定义,并得出了对称系统具有较好结构的结论.

本文把对称性和解耦问题联系起来,讨论具有对称性的非线性系统的反馈解耦问题.以便了解,如果非线性系统 $\dot{x}=f(x,u)$ 具有对称性,它将还有什么好的性质?

由微分几何控制理论知,非线性系统是一三元组 $\Sigma(M,B,f)$ 使得

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\pi_M"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

可交换.其中 M 是 n 维状态流形,$\pi: B\to M$ 是 M 上一 $(n+m)$ 维纤维丛,f 是 C^∞ 映射,π_M 是 TM 在 M 上的自然投射.

对每个非线性系统 $\Sigma(M,B,f)$,定义仿射分布:

$$\Delta^e(x,u)=\{X\in T_{(x,u)}B\,|\,\pi_* X=f(x,u)\}, \tag{1.2a}$$

$$\Delta^e_0(x,u)=\{X\in T_{(x,u)}B\,|\,\pi_* X=0\}. \tag{1.2b}$$

称仿射系统 (Δ^e,Δ^e_0) 为 Σ 的扩展系统,记 Σ^e.

说明:在局坐标下,Σ 表示为 $\dot{x}=f(x,u)$,则 Σ^e 由下式给出

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,u),\\ \dot{u}&=v.\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 $v\in V\cong R^m$ 是新的输入.

下面给出系统对称性的定义.由于我们只讨论局部情况,由[2],不失一般性,只讨论无穷小状态空间对称的情况.

定义 1.1　(G,Φ) 是 Σ 的无穷小状态空间对称,若

$$T(\xi_M)_t f(x,u)=f((\xi_M)_t(x),u). \tag{1.4}$$

本文于1990年6月6日收到.1991年9月28日收到修改稿.

其中 G 是李群，Φ 是 G 在 M 上的李作用．$\xi\in T_eG$，T_eG 是 G 的李代数，$t\in R^1$．ξ_M 是相应于 ξ 的李作用的无穷小生成元，$(\xi_M)_t$ 是它的流，$T(\xi_M)_t$ 是流的切映射．

2　导出分布及性质

这一节将定义对称系统的导出分布族，并讨论其性质．假设 Σ 具有无穷小状态空间对称 (G,Φ)，G 是紧致连通李群，$\dim G\leqslant n=\dim M$，且 Φ 是非退化的．

由李群李代数理论（见[5]），有：

定理　紧致连通李群 G 的李代数 $\mathscr{L}$ 是其中心 $C(\mathscr{L})$ 和单理想 $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\cdots,\mathscr{L}_s$ 的直和，即

$$\mathscr{L}=C(\mathscr{L})\oplus\mathscr{L}_1\oplus\mathscr{L}_2\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}_s. \tag{2.1}$$

设 $C(\mathscr{L})$ 的维数为 q，$\mathscr{L}_j(j=1,\cdots,s)$ 的维数为 k_j．取 $\xi^r\in C(\mathscr{L})$，$r=1,\cdots,q$；$\xi_j^i\in\mathscr{L}_j$，$i=1,\cdots,k_j$，$j=1,\cdots,s$，使 ξ^r,ξ_j^i 构成 $\mathscr{L}$ 中 $k'=\dim G$ 个线性独立的向量场．由于 Φ 非退化，从而相应的 k' 个无穷小生成元 ξ_M^r,ξ_{jM}^i 也是线性独立的．

令

$$\Delta_0^d(x)=Sp\{\xi_M^r(x)\mid r=1,\cdots,q\},$$

$$\Delta_i^d(x)=Sp\{\xi_{iM}^j(x)\mid j=1,\cdots,k_i\},\ i=1,\cdots,s.$$

定义 2.1　如上定义的 $\Delta_0^d,\Delta_1^d,\cdots,\Delta_s^d$ 称为对称系统在紧致连通李群作用下的导出分布族．

上面定义的导出分布具有如下性质．

定理 2.2　导出分布 $\Delta_0^d,\Delta_1^d,\cdots,\Delta_s^d$ 是关于 Σ 的同时可积的局部能控不变分布族．

证　由(2.1)及 $\Delta_i^d(i=0,\cdots,s)$ 的定义知 Δ_i^d 是线性独立的，且由中心和理想的概念与性质（见[5]）知 Δ_i^d 是非奇异对合的，$\Delta_i^d+\Delta_j^d(0\leqslant i,j\leqslant s)$ 也是非奇异对合的．故由[1]定理4.2知导出分布是同时可积的．

由李括号的定义（见[1]）及(1.4)有

$$[\xi_M,f]=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[(\xi_M)_{-t*}f((\xi_M)_t(x),u)-f(x,u)]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[(\xi_M)_{-t*}(\xi_M)_{t*}f(x,u)-f(x,u)]=0.$$

从而对于 $\xi^1,\cdots,\xi^q\in C(\mathscr{L})\subset T_eG=\mathscr{L}$，有

$$[\xi_M^i,(f\cdot,u)]=0,\quad i=1,\cdots,q.$$

故　$$[(f\cdot,u),\Delta_0^d]\subset\Delta_0^d.$$

同理可证　$$[f(\cdot,u),\Delta_i^d]\subset\Delta_i^d,\quad i=1,\cdots,s.$$

故由能控不变分布的定义（见[3]）知它们是局部能控不变的．　证毕．

3　对称系统的反馈解耦

先给出我们问题的描述如下：

定义 3.1　称非线性系统 Σ 在某点 $p\in M$ 局部状态反馈解耦问题可解，若存在一状态反馈 $u=\alpha(x,\tilde{u})$ 以及含 p 点的一个局部坐标邻域，使得在局部坐标 z 上闭环系统

$$\dot{x}=f(x,\alpha(x,\tilde{u}))=\tilde{f}(x,\tilde{u})$$

具有如下的解耦形式

$$
\begin{aligned}
\dot{z}^1 &= \tilde{f}^1(z^1, \tilde{u}^1),\\
&\vdots\\
\dot{z}^k &= \tilde{f}^k(z^k, \tilde{u}^k).
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

不失一般性，可以假设 Σ 具有强可接近性(见[1])，于是有：

定理 3.2 在紧致连通李群作用下具有无穷小状态空间对称的非线性系统 Σ，设它在 p 点强可接近，Δ_0^d在 p 点非奇异. 则 Σ 在 p 点的局部状态反馈解耦问题可解的充要条件是，导出分布 $\Delta_0^d, \Delta_1^d, \cdots, \Delta_s^d$ 满足：

1) $$\dim G = m, \quad s = k - 1, \tag{3.2a}$$

2) $$\Delta_0^d = \Delta_0^d \cap f_*^{-1}(\dot{\Delta}_0^d) + \cdots + \Delta_0^d \cap f_*^{-1}(\dot{\Delta}_s^d). \tag{3.2b}$$

给出证明前，需要下面的引理：

引理 3.3 设 D 是 M 上的非奇异对合分布，$\Delta_0^d \cap f_*^{-1}(\dot{D})$非奇异，则 D 对于 Σ 是局部能控不变分布，当且仅当定义在 B 上的分布 $E = f_*^{-1}(\dot{D})$对于 Σ^e 是局部能控不变的.

证 与[4]中的说明类似，略.

引理 3.4 设系统 Σ 在 p 点强可接近，$D_1, D_2, \cdots, D_k$ 为关于 Σ 的同时可积的能控不变分布，Δ_0^d 在 p 点非奇异，且

$$\Delta_0^d = \Delta_0^d \cap f_*^{-1}(\dot{D}_1) + \cdots + \Delta_0^d \cap f_*^{-1}(\dot{D}_k),$$

则 $f_*^{-1}(\dot{D}_i)(i=1, \cdots, k)$为关于 Σ^e 的相容不变分布族.

证 注意到 $f_*^{-1}(\dot{D}_i)(i=1, \cdots, k)$是定义在扩展系统，即仿射系统 Σ^e 上的，余下的证明同[1].

定理 3.2 的证明 (必要性)由(3.1)，取定义在 B 上的分布

$$E_j = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right\}, \quad i = 1, \cdots, k.$$

容易验证，分布族 $\pi_* E_i, i=1, \cdots, k$ 满足定理条件.

(充分性)由定理 2.2 的证明过程知，$\Delta_0^d, \Delta_1^d, \cdots, \Delta_s^d$ 在 p 点线性独立，且它们是非奇异对合的. 简单地推导可知，$f_*^{-1}(\dot{\Delta}_0^d), f_*^{-1}(\dot{\Delta}_1^d), \cdots, f_*^{-1}(\dot{\Delta}_s^d)$也是线性独立的. 又由条件(3.2b)知，对任一 $I \subset \{0, 1, \cdots, s\}$，分布 $\sum\limits_{i \in I} f_*^{-1}(\dot{\Delta}_i^d)$是非奇异的，也是对合的. 故由[1]定理 4.2 知 $f_*^{-1}(\dot{\Delta}_0^d), f_*^{-1}(\dot{\Delta}_1^d), \cdots, f_*^{-1}(\dot{\Delta}_s^d)$是同时可积的.

由(3.2b)知，$\Delta_0^d \cap f_*^{-1}(\dot{\Delta}_i^d)$是非奇异的，而 Δ_i^d 是关于 Σ 的能控不变分布(定理 2.2)，故由引理 3.3，$f_*^{-1}(\dot{\Delta}_i^d)$是关于扩展系统 Σ^e 能控不变的.

由于 Σ 强可接近，从而 Σ^e 强可接近，而且因 Δ_0^d 非奇异，所以由引理 3.4，$f_*^{-1}(\dot{\Delta}_0^d), \cdots, f_*^{-1}(\dot{\Delta}_s^d)$是关于 Σ^e 的相容不变分布族.

由(3.2a)及[4]知，可选局部坐标$(x, u) = (x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_m) = ((x^0, u^0), (x^1, u^1), \cdots, (x^s, u^s))$使得

$$f_*^{-1}(\dot{\Delta}_i^d) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right\}, \quad i = 0, \cdots, s.$$

故对于 Σ^e，类似于[6]的证明过程，有

$$\dot{x}^i = f^i(x^i, u^i), \quad i = 0, \cdots, s.$$

注意到 $s = k - 1$，简单坐标变换即可得到(3.1). 证毕.

4 结　　论

定理 3.2 表明，对于具有对称性的非线性系统，它的反馈解耦条件较不具对称性的容易验证. 对于具有对称性的系统，只需验证导出分布是否满足(3.2)即可，勿需寻找一族所谓的同时可积的能控不变分布. 这个简便性是由对称性得来的.

参　考　文　献

[1] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京：科学出版社，1988

[2] Grizzle J. and Marcus S.. The Structure of Nonlinear Control Systems Possessing Symmetries, IEEE Trans. Automat. Contr., 1985,30(3):248—257

[3] Nijmeijer H. and Schaft A.. Controlled Invariance for Nonlinear Syatems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, 27(4):904—914

[4] Schaft A.. Linearization and Input-output Decoupling for General Nonlinear Systems. Syst. Contr. Lett., 1984, 5(1):27—33

[5] 严志达，许以超. Lie 群及其 Lie 代数. 北京：高等教育出版社，1985

[6] Nijmeijer H.. Feedback Decomposition of Nonlinear Control Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, 28(8):861—862

Feedback Decoupling for Nonlinear Systems with Symmetries

LI Zhonghua　and　ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeast University of Technology · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, we discussed feedback decoupling problem for nonlinear systems possessing symmetries by differential geometric approach. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are given. We can see from these conditions that our results are simpler than those of systems without symmetries. The main results obtained in our paper indicate that systems with symmetries always have good properties as well as good structure.

Key words: symmetry; derived distributions; feedback decoupling

本文作者简介

李中华　1986 年 7 月在东北工学院自控系获工学学士学位. 1989 年 1 月在东北工学院研究生院获工学硕士学位. 现为东北工学院自控系讲师. 研究方向为非线性系统的结构分析与综合，解耦与线性化. 目前从事非线性系统的自适应控制研究.

张嗣瀛　东北工学院自控系教授，博士生导师. 研究工作兴趣为最优控制，微分对策，主从对策，控制系统的结构控制理论及应用，控制系统的结构对称性及相似性理论的研究等. 目前从事国家自然科学基金资助项目“复杂大系统的控制结构理论及应用”的研究.