第 10 卷第 1 期
1993 年 2 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 10, No. 1
Feb., 1993

一般2-D线性常系数离散状态空间模型渐近稳定性的一类 Lyapunov 方法*

杨成梧　孙建中　邹　云
(华东工学院八系·南京,210014)

摘要:本文给出了一般 2-D 线性常系数离散状态空间模型(2-D GM)的渐近稳定性的定义以及相应的判据,并借助于 Lyapunov 方程给出了 2-D Roesser Model(2-D RM)渐近稳定条件,推广和简化了文献[1,7]的有关结论.最后通过行列式的一个简单性质,证明了关于 2-D GM 渐近稳定性的判定可以转化为一类特殊的 2-D RM 的相应问题,从而得到了判定 2-D GM 渐近稳定性的 Lyapunov 方法.

关键词:2-D 系统;渐近稳定性;Lyapunov 方程;多复变函数理论

1 引　言

关于 2-D 线性常系数离散状态空间的渐近稳定性的研究大多集中于 70 年代初到 80 年代中期[1,7],并取得了丰硕的成果.然而受多维数字滤波器稳定性定义的影响[4],现有的(例如,作为 2-D GM 特例之一的 2-D FMM Ⅱ)渐近稳定性定义方式和通常所给的边界条件不太协调[4,7],此外现有的 2-D 系统稳定性判据通常都归结为在单位园柱 $|z_1|\leqslant 1$, $|z_2|\leqslant 1$ 内判别其特征多项式是否存在零点的问题[1].显然这是相当困难的.所以探求一种在定义方式上更为合理的 2-D GM 渐近稳定性定义,并通过 Lyapunov 直接法研究 2-D GM 的渐近稳定性显得十分有意义.对于 2-D RM,文[4,7]在这一方面取得了相当好的结果,在前人工作基础上,本文给出了一种相对合理的 2-D GM 渐近稳定性的定义及其相应的充分和必要条件,并利用行列式性质,将 2-D GM 渐近稳定性的判别问题转化为一类特殊的 2-D RM 的渐近稳定性,然后利用 Lyapunov 直接法分析了 2-D RM 的渐近稳定性,所得结果改进了[4～7]的有关结论,从而较好地解决了 2-D GM 的渐近稳定性的判别问题.

2 2-D GM 的渐近稳定性

考察如下形式的一般 2-D 线性常系数离散状态空间模型[1]

$$x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+B_0u(i,j)+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1), \tag{1}$$

$$y(i,j)=Du(i,j). \tag{2}$$

其中 $x\in R^n, u\in R^m, y\in R^p, A_i, B_i, D$ 分别为具有适当维数的矩阵.

边界条件为

$$x(i,0),\ x(0,j),\quad i=0,1,\cdots,\quad j=1,\cdots. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1991年5月15日收到. 1992年7月8日收到修改稿.

定义 1 称 2-D GM 为渐近稳定的，系指当输入 $u(i,j)$ 为零且 $\sup_j \|x(0,j)\|$，$\sup_j \|x(i,0)\|$ 有界时，方程(1)的状态解 $x(i,j)$ 满足 $\sup_{i,j}\|x(i,j)\|$ 有界且 $\lim_{i,j\to\infty} x(i,j)=0$. 这里 $\|\cdot\|$ 表示(任一)矩阵范数[3].

显然从状态解形式[8]即可看出该定义的合理性，另外它与现有的一维离散系统[3]及 Roesser 模型(RM)[1]的渐近稳定性定义相吻合.

为便于讨论起见，引入转移矩阵如下：

定义 2[8] 2-D GM 的转移矩阵 $\Phi(i,j)$ 定义为

$$\Phi(i+1,j+1) = A_0\Phi(i,j) + A_1\Phi(i+1,j) + A_2\Phi(i,j+1), \tag{4}$$

$$\Phi(0,0) = I, \quad \Phi(i,j) = 0, \quad i<0 \text{ 或 } j<0. \tag{5}$$

引理 1[8] $u(i,j)\equiv 0$ 时，2-D GM 的状态解 $x(i,j)$ 为

$$\begin{aligned} x(i,j) = &\Phi(i-1,j-1)A_0x(0,0) + \sum_{k=1}^{i}(\Phi(i-k,j-1)A_1 \\ &+ \Phi(i-k-1,j-1)A_0)x(k,0) + \sum_{k=1}^{j}(\Phi(i-1,j-k)A_2 \\ &+ \Phi(i-1,j-k-1)A_0)x(0,k). \end{aligned} \tag{6}$$

引理 2 若 $F(w)$ 为 $C^n \to C$ 的连续函数，定义 $V=\{w\in C^n: F(w)=0\}$，设 E 为有界闭集(C^n 中的紧集)且 $E\cap V=\varnothing$ 为空集，则

$$d(E,V) > 0. \tag{7}$$

式中 $d(E,V)=\inf\{\|w_1-w_2\|: w_1\in E, w_2\in V\}$ 为集合 E,V 间的距离.

证 显然由 V 的闭性即可证得本引理结论.

引理 3[2](Abel 定理) 若幂级数 $\sum_{i_1\geqslant 0\cdots i_n\geqslant 0} a_{i_1}\cdots a_{i_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}$ 在一点 $(z_1^0,\cdots,z_n^0)$ 处收敛，则它在园柱区域 $|z_k|\leqslant r_k<|z_k^0|\,(k=1,\cdots,n)$ 上绝对一致收敛，r_k 为小于 $|z_k^0|$ 的任一正数.

定理 1 设

$$A(z_1,z_2) = I - A_1z_1 - A_2z_2 - A_0z_1z_2,$$

则 2-D GM 渐近稳定的充分条件为

$$\det A(z_1,z_2) \neq 0, \quad |z_1|\leqslant 1, \quad |z_2|\leqslant 1. \tag{8}$$

证 注意到 $|z_1|\leqslant 1, |z_2|\leqslant 1$ 为有界闭集，从而由引理 2 知：$\exists\ \delta>0$ 使得：若(8)成立，则

$$\det A(z_1,z_2) \neq 0, \quad |z_1|\leqslant 1+\delta, \quad |z_2|\leqslant 1+\delta, \tag{9}$$

因而 $A^{-1}(z_1,z_2)=\mathrm{adj}A(z_1,z_2)\det^{-1}A(z_1,z_2)$ 在 $|z_1|\leqslant 1+\delta, |z_2|\leqslant 1+\delta$ 中连续且为全纯函数，其中 $\mathrm{adj}(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的伴随阵，从而由引理 3 知

$$A^{-1}(z_1,z_2) = \sum_{i\geqslant 0, j\geqslant 0}\Phi(j,i)z_1^iz_2^j, \text{(证明见附录)} \tag{10}$$

在 $|z_1|\leqslant r, |z_2|\leqslant r, (r=1+\frac{\delta}{2})$ 内绝对一致收敛，从而 $\sum_{i,j}\|\Phi(i,j)\|r^{i+j}$ 收敛. 故若记

$$M \triangleq \sum_{i,j}\|\Phi(i,j)\|r^{i+j}, \tag{11}$$

则

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|\Phi(i,j)\| \leqslant Mr^{-i}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\|\Phi(i,j)\| \leqslant Mr^{-j}. \tag{13}$$

记 $M_1 \triangleq \max\{\sup_j \|x(0,j)\|,\ \sup_i \|x(i,0)\|\}$，则由引理 1 易得

$$\|x(i,j)\| \leqslant MM_1((\|A_0\| + \|A_1\|)r^{-i+1} + (\|A_0\| + \|A_2\|)r^{-j+1}) \tag{14}$$

$$\leqslant MM_1 r(2\|A_0\| + \|A_1\| + \|A_2\|), \tag{15}$$

由(14)，(15)及定义 1 即易知本定理结论成立.

定理 2　设 $A(z_1,z_2)$如定理 1 所述，则 2-D GM 渐近稳定的必要条件为

$$\det A(z_1,z_2) \neq 0,\quad |z_1| < 1,\quad |z_2| < 1. \tag{16}$$

证　设 2-D GM 渐近稳定. 由引理 1 可知，若取 $x(0,0)$为满足 $\|x(0,0)\|=1$ 的任意一向量，而 $x(k,0)=x(0,k)=0(k\geqslant 1)$. 则由定义 1 知 $\|\Phi(i,j)A_0\|$ 有界. 类似地可得 $\|\Phi(i,j)A_1+\Phi(i-1,j)A_0\|$，$\|\Phi(i,j)A_2+\Phi(i,j-1)A_0\|$ 均有界，从而 $\|\Phi(i,j)A_1\|$，$\|\Phi(i,j)A_2\|$ 也均有界，因此由定义 2 可知，$\sup_{i,j}\|\Phi(i,j)\|<\infty$. 于是由引理 3 可知：$\sum_{i,j\geqslant 0}\Phi(i,j)z_1^i z_2^j$ 在 $|z_1|<1, |z_2|<1$ 内任意闭集上绝对一致收敛，从而 $A^{-1}(z_1,z_2)$(参见(10))在 $|z_1|<1, |z_2|<1$ 内解析，从而定理得证.

注 1　由于

$$\det(I - A_1z_1 - A_2z_2 - A_0z_1z_2) = \det\begin{bmatrix} I - A_1z_1 & -z_1(A_0 + A_1A_2) \\ -z_2I & I - A_2z_2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

从而定理 1 的条件可以转化为考虑 RM[1,7]的一个特殊情形 $A=\left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_0+A_1A_2 \\ \hdashline I & A_2 \end{array}\right]$ 的渐近稳定性，这样就将 2-D GM 的渐近稳定的判别转化为 2-D RM 的相应问题.

3　2-D RM 的渐近稳定性

考虑一般 2-D 系统(2-D GM)的特殊情况 2-D Roesser 模型(2-D RM).

取　$A_2 \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，$B_0 = 0$，$A_0 = 0$，$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}$，$B_2 = \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

即得 2-D RM 模型[1].

引理 4[1,7]　2-D RM 为渐近稳定，当且仅当

$$\det(I - A_1z_1 - A_2z_2) \neq 0,\quad |z_1| \leqslant 1,\quad |z_2| \leqslant 1. \tag{18}$$

2-D RM 的 Lyapunov 方程具有如下形式

$$Q = P - A^{\mathrm{T}}PA. \tag{19}$$

其中

$$A = A_1 + A_2,\quad A_{11} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}.$$

引理 5　若∃ Q,P 均为对称正定阵，使(19)成立，则

$$\rho(A) < 1. \tag{20}$$

其中 $\rho(\cdot)$表示矩阵谱半径[3].

证　用反证法易得.

定理 3　如果存在分块对角正定阵 $P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$，$P_1$ 与 A_{11}同阶，使由(19)给出的 Q

为正定阵，则

$$\det(I - A_1z_1 - A_2z_2) \neq 0, \quad |z_1| \leqslant 1, \quad |z_2| \leqslant 1,$$

从而 2-D RM 为渐近稳定的.

定理 4 设 Q 为任一给定的正定阵，那么若 2-D RM 为渐近稳定的，则必存在唯一的正定阵 P 使(19)成立.

综合定理 3 和定理 4 立即可得

定理 5 给定正定阵 Q 和分块对角阵，$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$，$P_1$ 与 A_{11}同阶，满足(19)，则

$$\det(I - A_1z_1 - A_2z_2) \neq 0, \ |z_1| \leqslant 1, \ |z_2| \leqslant 1$$

成立当且仅当 P 为正定阵.

定理 3～定理 5 系[5～7]有关性质的推广，由于证明相当容易，限于篇幅略去.

下面给出 P,Q 满足定理 5 的条件的一个定量描述.

定理 6 若

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

$\rho(A)<1$，Q 为一给定的正定阵，Q,P 满足(19)，则 P 为对角分块正定阵即 $P_2=0, P_3=0$，而 P_1, P_4 正定，当且仅当

1° $Q_1=P_1-A_{11}^{\mathrm{T}}P_1A_{11}-A_{21}^{\mathrm{T}}P_4A_{21}$;

2° $Q_2=-A_{11}^{\mathrm{T}}P_1A_{12}-A_{21}^{\mathrm{T}}P_4A_{22}$;

3° $Q_4=P_4-A_{22}^{\mathrm{T}}P_4A_{22}-A_{12}^{\mathrm{T}}P_1A_{12}$.

证 由简单代数推导即得.

注 2 虽然[5]给出了 2-D RM 渐近稳定的一个更进一步的结论，即若存在 $Q>0$，$P>0$ 满足 $Q=P-A^{\mathrm{T}}PA$，其中 $A=\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$，则 2-D RM 为渐近稳定的. 然而其结论一般来说是不成立的. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3}{4} & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则有 $Q=P-A^{\mathrm{T}}PA$，但易知 $d_2\left(\frac{1}{2},-\frac{4}{7}\right)=0$. 从而可以认为本文所得结果较好地改进了现有结论.

4 算 例

考虑2-D GM 的一个模型.

取

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{40} \\ \frac{7}{80} & \frac{137}{400} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{20} \end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}\frac{5}{16} & -\frac{29}{60}\\ -\frac{29}{60} & \frac{373}{225}\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}\frac{51}{64} & -\frac{13}{160}\\ -\frac{13}{160} & \frac{291}{400}\end{bmatrix},\quad A=\left[\begin{array}{c:c}A_1 & \frac{1}{4}I\\ \hdashline I & A_2\end{array}\right],$$

易得

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix},\quad P_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\quad P_2=I_2,$$

Q,P,A 满足(19)，由定理3知，该模型为渐近稳定的，但要直接判别 $\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)$ 在 $|z_1|\leqslant 1,|z_2|\leqslant 1$ 内是否恒不为零，相对来说比较复杂.

5 结束语

本文利用了多复变函数的结论，给出了一般 2-D 系统渐近稳定的充分必要条件；改进了 2-D RM 的现有 Lyapunov 方法；并利用行列式的性质，在一定条件下，将 2-D GM 的渐近稳定的判别转化为 2-D RM 的相应问题，提供了一种判别 2-D GM 渐近稳定的有效途径.

参 考 文 献

[1] 杨成梧. 二维线性多变量系统. 华东工学院学报，1987，127—148

[2] 钟同德. 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程. 厦门：厦门大学出版社，1986

[3] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984，240—243

[4] Fornasini, E., et al.. On the Internal Stability of Two-Dimensional Filter. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979, AC-24(1): 129—130

[5] Mahgoub, H., et al.. A Lyapunov Function of Two-Dimensional Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(2): 170—172

[6] Agathoklis, P.. Lower Bounds for the Stability Margin of Two-Dimensional Lyapunov Equation. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1988, 35(6): 745—748

[7] Kaczorek, T.. Two-Dimensional Linear Systems. Springer-Verlag, Beiling/Heidberg, 1985, 157—164

[8] Kurek, J. E.. The General State-Space Model for a Two-Dimensional Linear Digital System. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(6): 600—602

[9] 汤国熙. z 变换理论与应用. 北京：宇航出版社，1988，295—311

附录

(10)式的证明　考虑系统

$$x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+u(i,j),\tag{A1}$$

边界条件为

$$x(i,0)=x(0,j)=0,\quad i,j\geqslant 0,\tag{A2}$$

且控制 $u(i,j)$ 满足

$$u(0,0)\in R^m\quad \text{为任意给定值},\tag{A3a}$$

$$u(i,j)=0,\quad i\neq 0,\quad j\neq 0.\tag{A3b}$$

则由[8]知(A1)的状态解为

$$x(i,j)=\Phi(i-1,j-1)u(0,0),\tag{A4}$$

分别对(A1)和(A4)作 2-D z 变换[9]可得

$$x(z_1,z_2)=(z_1z_2I-z_1A_1-z_2A_2-A_0)^{-1}u(0,0) \tag{A5}$$

和

$$x(z_1,z_2)=z_1^{-1}z_2^{-1}\sum_{i,j\geq 0}\Phi(i,j)z_1^{-i}z_2^{-j}u(0,0). \tag{A6}$$

注意到(A3a)则由(A5)和(A6)推得

$$A^{-1}(z_2^{-1},z_1^{-1})=\sum_{i,j\geq 0}\Phi(i,j)z_1^{-i}z_2^{-j}, \tag{A7}$$

由此立即得(10)式. 证毕.

A Lyapunov Method for Asymptotic Stability of a General 2-D State-Space Model for Linear Discrete Systems(2-D GM)

YANG Chengwu, SUN Jianzhong and ZOU Yun

(The Eighth Department, East China Institute of Technology · Nanjing, 210014, PRC)

Abstract: In this paper, the definition of asymptotic stability and sufficient and necessary conditions for the stability of the general 2-D state space model for linear discrete systems(2-D GM) are given. In addition, necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of Roesser model (RM) are presented based on the Lyapunov equation, also the results in [1,7] are extended. In the end, it is shown that the stability criteria for RM can be applied to a 2-D GM via a simple property of determinant of matrix, and then the stability of 2-D GM can be determined by that of RM. An example is given to illustrate the validity of the proposed mothod.

Key words: 2-D systems; asmptotic stability; Laypunov equation; multivariable complex analysis

本文作者简介

杨成梧 1936年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院,后一直在华东工学院任教,现为华东工学院工程热物理与飞行力学系教授. 目前主要研究领域是广义系统,2-D系统,H_∞控制理论,离散事件动态系统,非线性系统几何方法及正交函数理论及应用.

孙建中 1967年生. 1989年毕业于浙江大学数学系,1991年于华工学院获工学硕士学位. 后分配至成都某部科研所从事军事通讯技术研究工作. 现主要研究兴趣为信号处理等.

邹 云 1962年生. 1983年毕业于西北大学数学系. 1987年和1990年在华东工学院获硕士和博士学位. 后留校任教,现任讲师. 目前主要研究兴趣是广义系统,H_∞控制理论,2-D系统.

国际自控联 (IFAC) 简讯

一、从1993年1月起国际自控联所属各种会议不再出版会议录,仅由会议组织者出版论文预印本(Preprints),读者可向国际自控联购买.

二、1993年国际自控联将出版新的刊物"控制工程实践"(Control Engineering Practice),主要刊载国际自控联所属会议上有应用成份的文章,并且附有所属会议文章的索引.

三、IEEE除了出版IEEE Transaction on Automatic Control及Control Systems Magazine外,1993年准备出版Control System Technology (控制系统技术),报导有关技术、计算及仪表方面的动向,而不侧重理论.