第 10 卷第 1 期
1993 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 1
Feb., 1993

一种新的最优极点配置方法

谢宋和　　　　李人厚
(郑州轻工业学院控制工程系,450002)　(西安交通大学系统工程研究所,710049)

摘要: 本文从 LQ 逆问题着眼提出了一种新的最优极点配置方法,推导了加权矩阵 Q 和 R 与开环特征多项式、最优闭环特征多项式之间的关系. 只要给定一组期望的闭环极点,即可确定与之对应的加权矩阵 Q 和 R,从而得到一个具有指定极点的最优控制系统.

关键词: 最优控制;LQ 逆问题;加权矩阵;特征多项式;极点配置

1 引　　言

所谓最优极点配置问题,就是要确定一个状态反馈控制律,使对应的闭环系统具有一组预先指定的最优闭环极点,并且使某个线性二次型性能指标极小. 问题是并非任何一个稳定的反馈增益矩阵都可以构成最优控制系统[1],因此,研究最优极点配置问题的意义在于:对于单变量系统来讲,如何选择期望的闭环极点使之成为一组最优极点,从而保证与之对应的唯一反馈增益是最优的;对于多变量系统而言,在已知指定极点是一组最优极点的前提下,利用极点配置的自由度,来寻找一个满足极点配置要求的最优反馈增益. 由此可见,利用最优极点配置方法所得到的闭环控制系统能兼顾极点配置方法的良好动态特性和 LQ 最优设计技术的内在鲁棒性等双重优点[2].

近三十年以来,科学工作者对该问题做了大量的研究工作,其中绝大多数的研究方法是以极点移动为基础的数值迭代方法[3~6]并且在迭代过程中要解非线性代数 Riccati 方程. 本文提出了一种基于 LQ 逆问题分析的解析方法,为最优极点配置提供了一种新的尝试,并且对于深入研究 LQ 逆问题解的存在性和唯一性有一定的参考价值.

2 LQ 逆问题解的参数化表示方法

考虑一个线性定常可控系统

$$\dot{X} = AX + BU. \tag{1}$$

式中 A 和 B 分别是 $n\times n$ 和 $n\times m$ 维定常矩阵.

二次型性能指标为

$$J = \int_0^{+\infty} (X^\tau QX + U^\tau RU)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

由最优控制理论知:使性能指标(2)极小的最优控制律是

$$U = -KX = -R^{-1}B^\tau PX. \tag{3}$$

式中 P 满足代数 Riccati 方程

$$A^\tau P + PA - PBR^{-1}B^\tau P + Q = 0. \tag{4}$$

本文于 1990 年 5 月 11 日收到. 1991 年 3 月 11 日收到修改稿.

由(1)式和(3)式可得最优闭环系统

$$\dot{X} = (A - BK)X \triangleq A_c X. \tag{5}$$

定理 1 使闭环系统(5)具有稳定的极点 $\lambda_{ci}(i=1,2,\cdots,n)$的加权矩阵 Q 可以参数化表示为

$$Q = -(A^{\tau}T_2 + T_2 S)T_1^{-1}. \tag{6}$$

并且由 Q 和 R 阵确定的状态反馈增益为

$$K = R^{-1}B^{\tau}T_2T_1^{-1}. \tag{7}$$

其中 S 是一个特征值集合为$\{\lambda_{ci}, i=1,2,\cdots,n\}$的实矩阵，待定的参数阵 T_1 和 T_2 满足以下三点约束条件：

1) T_1是非奇异阵.

2) T_1和 T_2满足矩阵方程

$$AT_1 - T_1S = BR^{-1}B^{\tau}T_2, \quad R > 0. \tag{8}$$

3) 由(6)式确定的 $Q \geqslant 0$.

由定理 1 可见，对于已知的闭环极点 λ_{ci}，可以适当地选择矩阵 S，一旦找到了满足以上要求的 T_1 和 T_2，即可确定满足极点配置要求的最优反馈 K，以及与之对应的加权矩阵 Q 和 R，从而获得一个具有指定闭环极点的最优控制系统.

3 最优极点配置方法

对于单输入系统来说，由于闭环极点与反馈增益是一一对应的，因此，关键是如何选择或修正指定的闭环极点，使之成为一组最优极点. 众所周知，对于一个单输入可控系统而言，总存在一个线性变换，使之成为可控标准形

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & I_{n-1} & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right], \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

与指定极点 λ_{ci}对应的闭环特征多项式为

$$P_c(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{ci}) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0. \tag{10}$$

根据定理1可取 $T_1 = I_n$, $R=1$, S 为

$$S = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & I_{n-1} & \\ \hline -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-1} \end{array}\right], \tag{11}$$

则(8)式可简化为

$$A - S = BB^{\tau}T_2. \tag{12}$$

由(12)式可以求得

$$t_{n,i} = b_{i-1} - a_{i-1}, \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{13}$$

式中 $t_{n,i}$表示矩阵 T_2 的第 n 行第 i 列元素.

由定理 1 可知 $P = T_2T_1^{-1}$，因此，要使 P 对称，此时需要 T_2 对称，Q 也将是对称阵.

定理 2 对于单输入系统(9)来说，若取 $R=1$，那么闭环系统(5)具有稳定的最优极点 λ_{ci}的加权矩阵 Q 可以由下式确定

$$Q_{i,j}=b_{i-1}b_{j-1}-a_{i-1}a_{j-1}-t_{i,j-1}-t_{j,i-1}. \tag{14}$$

其中 $Q_{i,j}$和 $t_{i,j}$分别表示矩阵 Q 和 T_2 的第 i 行第 j 列元素，且 $t_{i,j}$满足：a) $t_{i,j}=t_{j,i}$; b) 当 i 或 $j\leqslant 0$ 时，$t_{i,j}=0$; c) 当 $0<i$ 和 $j<n$ 时，$t_{i,j}$为自由参数；d) 当 i 或 $j=n$ 时，有

$$t_{i,n}=t_{n,i}=b_{i-1}-a_{i-1},\quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{15}$$

证　由定理 1 和(11)式至(13)式得证.

定理 3　在 SISO 可控标准形的 LQ 问题中，对于任何一个非对角阵 $\tilde{Q}$，总存在唯一对角阵 $\hat{Q}$ 与其等价，且有

$$\hat{Q}=\mathrm{diag}\left(\tilde{Q}_{i,i}+2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\tilde{Q}_{i-j,i+j}\right),\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

等价的权阵 $\tilde{Q}$ 和 $\hat{Q}$ 将对应有相同的极点配置和反馈增益 K.

推论 1　对于 SISO 系统来说，LQ 逆问题的解存在的充分条件是

$$a_k=b_k=0,\quad \forall k\in[0,n-1],$$

$$b_{i-1}^2-a_{i-1}^2+2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j(b_{i-j-1}b_{i+j-1}-a_{i-j-1}a_{i+j-1})\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

推理 2　对于任何单输入可控系统来说，LQ 逆问题的解可以表示为

$$Q=T^{\mathrm{T}}\bar{Q}T,\quad R=1.$$

式中 $\bar{Q}$ 由(14)式确定，T 为可控标准形线性变换矩阵.

由上述推论可见，若指定的闭环极点 λ_{ci}确定的系数 b_i 满足推论 1 中的不等式条件，那么对应的 K 是一个最优反馈增益矩阵.

4 例　子

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{16}$$

若期望的闭环极点分别为-3，-4和-5，则 $b_0=60$，　$b_1=47$，　$b_2=12$.

因此，满足指定极点配置要求的 K 只能是

$$K=[54\quad 36\quad 6]. \tag{17}$$

根据定理2中的(14)式有：

$$Q_{1,1}=b_0^2-a_0^2=3564,\quad Q_{1,2}=b_0b_1-a_0a_1-t_{1,1}=2754-t_{1,1},$$

$$Q_{1,3}=b_0b_2-a_0a_2-t_{1,2}=684-t_{1,2},\quad Q_{2,2}=b_1^2-a_1^2-2t_{2,1}=2088-2t_{1,2},$$

$$Q_{2,3}=b_1b_2-a_1a_2-t_{2,2}-t_{3,1}=444-t_{2,2},\quad Q_{3,3}=b_2^2-a_2^2-2t_{3,2}=36.$$

即

$$Q=\begin{bmatrix}3564&2754-t_{1,1}&684-t_{1,2}\\2754-t_{1,1}&2088-2t_{1,2}&444-t_{2,2}\\684-t_{1,2}&444-t_{2,2}&36\end{bmatrix}. \tag{18}$$

式中 $t_{1,1}$，$t_{1,2}$，$t_{2,2}$为自由参数. 若任取 $t_{1,1}=2754$，$t_{1,2}=684$，$t_{2,2}=444$，则此时的 Q 阵为

$$Q=\begin{bmatrix}3564&0&0\\0&720&0\\0&0&36\end{bmatrix}. \tag{19}$$

把 A,B,(19)式中的 Q 和 $R=1$ 代入方程(4)求得 P,而后由(3)式不难验证此时的最优反馈增益为

$$K=[54 \quad 36 \quad 6],$$

这就进一步说明了本文结论的正确性.

5 小　结

本文得到了 LQ 逆问题解的参数化公式,有助于揭开最优闭环极点与加权矩阵 Q 和 R 之间的相互关系. 通过分析单变量系统中加权矩阵与特征多项式系数之间的关系,得到了逆问题解存在的充分条件,为期望闭环极点的选择提供了一个重要的依据. 对于多变量系统来说,目前尚未得到很完美的结果,只能在一定的假设条件下,将多变量系统转化为相互独立的几个单变量系统来处理,限于篇幅,不宜在此做详细的分析和讨论.

参 考 文 献

[1] Kalman, R. E.. When is a Linear Control System Optimal. Trans. ASME(D), 1964, 86(1):51—60

[2] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1971

[3] Solheim, O. A.. Design of Optimal Control Systems with Prescribed Eigenvalues. Int. J. Control, 1972, 15(1):143—160

[4] Eastman, W. L. and Bossi, J. A.. Design of Linear Quadratic Regulator with Assigned Eigenvalue. Int. J. Contrl, 1984, 39(3):731—742

[5] Juang, J. C. and Lee, T. T.. On Optimal Pole Assignment in a Specified Region. Int. J. Control, 1984, 40(1):65—79

[6] Lee, T. T. and Liaw, G. T.. The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance. Int. J. Control, 1986, 43(2):233—246

A New Method for the Optimal Pole Assignment

XIE Songhe

(Department of Control Engineering, Zhengzhou Institute of Light Industry · Zhengzhou, 450002, PRC)

LI Renhou

(Institute of System Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, PRC)

Abstract: In this paper, a new method for optimal pole assignment is presented from the viewpoint of the LQ inverse problem. The relationships among the weighting matrices Q and R and the open-loop and optimal close-loop characteristic polynomials are derived. Given a set of desired closed-loop poles, the weighting matrices Q and R are at once determined corresponding to these poles, and an optimal control system is obtained with prescribed poles.

Key words: optimal control; LQ inverse problem; weighting matrix; characteristic polynomial; pole assignment

本文作者简介

谢宋和　1964年生. 1987年合肥工业大学电气工程系研究生毕业,现为郑州工业学院讲师. 目前研究方向是最优控制理论,预测控制,智能控制理论及其在家用电器中的应用,集散控制系统的开发、应用等.

李人厚　1935年生. 教授,博士生导师. 1957年毕业于上海交通大学. 1979年至1981年曾在英国曼彻斯特理工学院控制系统中心进修、工作. 历任西安交通大学无线电系、信息与控制工程系副主任、主任等职. 是全国自动化学会理事,陕西省自动化学会副理事长. 目前主要研究方向及兴趣是大系统递阶与分散控制理论与应用,分布式计算机控制与管理系统,专家系统方法在工业控制中的应用以及智能控制的理论与应用等.