随机大系统的大范围渐近随机关联稳定性*

冯昭枢　刘永清　　　胡宣达
(华南理工大学自动化系·广州,510641)　(南京大学数学系,210008)

摘要：本文通过分析随机大系统的孤立子系统和互联结构,并通过引入两个互联矩阵,提出了非Ito型随机大系统的大范围渐近随机关联稳定性的概念,并给出了充分条件.所考虑的随机大系统的随机噪声服从大数定律.本文给出了一个例子以说明所得结果的可用性.

关键词：随机大系统;稳定性;李雅普诺夫函数;大数定律;随机关联稳定性

1 引　　言

随机大系统的稳定性问题已由Michel[1],Ladde和Siljak[2],Michel和Miller[3],Siljak[4],Socha和Popp[5],Jumarie[6],Socha[7]等讨论过,其中Ladde和Siljak[2]对Ito型随机大系统提出了关联稳定性的概念,并给出了充分条件.然而,对于随机噪声服从大数定律的非Ito型随机大系统,至今仍未有与关联稳定性有关的研究成果.本文的目的,就是利用Has'minskii[8]关于随机系统大范围渐近随机稳定性的结果,和利用大系统稳定性分析的分解-集结方法(见作者专著[9,10]),通过对互联结构中的非噪声项和噪声项分别引入刻划结构扰动的两个互联矩阵,提出了非Ito型随机大系统的大范围渐近随机关联稳定性的概念,并给出了充分条件.所得到的稳定性定理可以认为是对应确定性结果的推广.

2 系统描述

考虑由下面非Ito型随机微分方程描述的随机大系统

$$(S):\ \dot{x} = F(t,x) + G(t,x)\xi(t,\omega). \tag{2.1}$$

其中$t\in R_+$,$x\in R^n$,$\xi=\{\xi(t,\omega),t\geqslant t_0\}$是一个取值于$R^m$的可分和可测随机过程,$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个完全概率空间,$F:R_+\times R^n\to R^n$,$G:R\times R^n\to R^{n\times m}$满足适当的条件(见文献[8]第一章10～11页)以保证对任意给定的初始条件$(t_0,x_0)\in R_+\times R^n$,方程(2.1)依概率1地(或称几乎必然地)存在唯一绝对连续的解过程$x(t)=x(t,\omega,t_0,x_0)$满足$x(t_0)=x_0$.进一步,我们假设$x=0$是系统(2.1)的唯一平衡态,$t_0\geqslant 0$.对本文中考虑到的其它随机系统,我们也作同样的假设.

假定随机大系统(S)具有下面的分解形式

$$(S):\ \dot{x}_i = f_i(t,x_i) + B_i(t,x_i)\xi + g_i(t,x) + h_i(t,x)\xi,\quad i=1,\cdots,N. \tag{2.2}$$

(S)可认为是由下面N个孤立子系统通过互联项相互联结而成的

$$(S_i):\ \dot{x}_i = f_i(t,x_i) + B_i(t,x_i)\xi,\quad i=1,\cdots,N. \tag{2.3}$$

其中

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助课题.
本文于1991年2月13日收到.

$$x_i \in \mathrm{R}^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^{N} n_i = n, \quad x = (x_1^{\mathrm{T}}, \cdots, x_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$
$$f_i: \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n_i} \to \mathrm{R}^{n_i}, \quad g_i: \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n} \to \mathrm{R}^{n_i},$$
$$B_i: \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n_i} \to \mathrm{R}^{n_i \times m}, \quad h_i: \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n} \to \mathrm{R}^{n_i \times m},$$
$$F = (f_1^{\mathrm{T}}, \cdots, f_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} + (g_1^{\mathrm{T}}, \cdots, g_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$
$$G = B_1 + \cdots + B_N + (h_1^{\mathrm{T}}, \cdots, h_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

且(2.2)中的互联项 $g_i(t,x)$ 和 $h_i(t,x)\xi$ 确定如下

$$g_i(t,x) \equiv g_i(t, e_{i1}^1 x_1, e_{i2}^1 x_2, \cdots, e_{iN}^1 x_N),$$
$$h_i(t,x)\xi \equiv h_i(t, e_{i1}^2 x_1, e_{i2}^2 x_2, \cdots, e_{iN}^2 x_N)\xi.$$

其中 $e_{ij}^k(i,j=1,\cdots,N;k=1,2)$ 均为定义在 R_+ 上并取值于 $[0,\ 1]$ 的连续函数，并记 $E_k=(e_{ij}^k)(k=1,2)$，且 E_k 是由基本互联矩阵 $\bar{E}_k=(\bar{e}_{ij}^k)(k=1,2)$ 生成的，即有

$$e_{ij}^k(t) \leqslant \bar{e}_{ij}^k, \quad i,j = 1,\cdots,N; \quad k = 1,2.$$

在本文中，如果 E_k 是由 $\bar{E}_k$ 生成的，就记 $E_k \in \bar{E}_k$.

3 定义与引理

记 $|\cdot|$ 为一个向量或一个矩阵的欧氏范数.

定义 3.1 随机系统 (S) 的平衡态是随机稳定的(或称为依概率稳定的)，如果对任意给定的正数 ε 和 ε'，存在正数 δ，使当 $|x_0|<\delta$ 时，有

$$P\{|x(t,\omega,t_0,x_0)| > \varepsilon'\} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

随机系统 (S) 的平衡态是大范围渐近随机稳定的，如果它是随机稳定的，并且如果对每个 x_0，对任意给定的正数 ε 和 ε'，存在一个正数 $T=T(x_0,\varepsilon,\varepsilon')$，使(3.1)对 $t\geqslant T$ 成立.

定义 3.2 随机过程 $\{\xi(t,\omega),t\geqslant t_0\}$ 称为是服从大数定律的，如果对任意给定的正数 ε 和 η，存在一个正数 T，使得对于所有大于 T 的 t，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}[\xi(s,\omega) - E\xi(s,\omega)]\mathrm{d}s\right| > \varepsilon\right\} < \eta.$$

定义 3.3 函数 Ψ 称为是属于 KR 类的，如果 $\Psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\Psi$ 是严格单调增加的，$\Psi(0)=0$，$\Psi(r)\to\infty(r\to\infty)$.

在本文中，我们需要利用下面的引理，它的证明完全类似于 Has'minskii[8]第一章定理5.1的证明，因此这里从略.

引理 3.1 对于随机系统 (S)，假设存在一个连续可微的李雅普诺夫函数 $V:\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^n\to R_+$，和存在两个 KR 类函数 Ψ_1 和 Ψ_2，使得下列条件成立：

1) 对所有 $(t,x)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^n$，有

$$\Psi_1(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant \Psi_2(|x|);$$

2) $\dot{V}_{(S)}(t,x)\leqslant(-c_1+c_2|\xi|)V$;

3) 随机过程 $\{|\xi(t,\omega)|,t\geqslant 0\}$ 服从大数定律，并满足

$$\sup_{t>0} E|\xi(t,\omega)| < c_1/c_2.$$

则随机系统 (S) 的平衡态是大范围渐近随机稳定的.

定义 3.4 称实值 $N\times N$ 维矩阵 $A=(a_{ij})$ 为一个 M-矩阵，如果 $a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$，即 A 的所有非对角线元素均非正数，且 A 的所有主子行列式均为正的.

引理 3.2 矩阵 $A=(a_{ij})$($N\times N$ 维)为 M-矩阵的必要充分条件是：存在对角形矩阵 $D=\text{diag}\{d_1,\cdots,d_N\}$，$d_i>0(i=1,\cdots,N)$，使得矩阵 $DA+A^{T}D$ 为正定的.

对具有分解形式(2.2)的随机大系统(2.1)，在引进描述互联结构中不含噪声的互联项的互联矩阵 E_1 和描述含有噪声的互联项的互联矩阵 E_2 的基础上，我们给出下面的稳定性概念.

定义 3.5 称具有分解形式(2.2)的随机大系统(3.1)是大范围渐近随机关联稳定的，如果对于 $E_k\in\overline{E}_k(k=1,2)$，随机大系统($S$)的平衡态均为大范围渐近随机稳定的.

4 主要结果

定理 4.1 具有分解形式(2.2)的随机大系统(2.1)是大范围渐近随机关联稳定的，如果下列条件得到满足：

1) 存在连续可微的函数 $V_i:\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}^{n_i}\to\mathrm{R}_+$，和存在 KR 类函数 Ψ_{i1},Ψ_{i2}和 Ψ_{i3}，以及存在正常数 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\alpha_{i3},\delta_i$ 和 β_i，使对于所有 $t\in\mathrm{R}_+$和 $x_i\in\mathrm{R}^{n_i}$，有

$$\Psi_{i1}(|x_i|)\leqslant V_i(t,x_i)\leqslant\Psi_{i2}(|x_i|),\tag{4.1}$$

$$\dot{V}_{i(S_i)}(t,x_i)\leqslant(-2\sigma_i+2\delta_i|\xi|)\Psi_{i3}(|x_i|),\tag{4.2}$$

$$\alpha_{i2}\Psi_{i2}(|x_i|)\leqslant\Psi_{i3}(|x_i|)\leqslant\alpha_{i1}\Psi_{i1}(|x_i|),\tag{4.3}$$

$$|\text{grad}V_i(t,x_i)|\leqslant 2\beta_i[\Psi_{i3}(|x_i|)]^{1/2}.\tag{4.4}$$

其中 $\text{grad}V_i$ 表示 V_i 的梯度向量，$i=1,\cdots,N$；

2) 存在非负常数 a_{ij}和 b_{ij}，使对于所有 $t\in\mathrm{R}_+$和 $x_i\in\mathrm{R}^{n_i}$，有

$$|g_i(t,x)|\leqslant\sum_{j=1}^{N}e_{ij}^{1}a_{ij}[\Psi_{j3}(|x_j|)]^{1/2},\quad i=1,\cdots,N,\tag{4.5}$$

$$|h_i(t,x)|\leqslant\sum_{j=1}^{N}e_{ij}^{2}b_{ij}[\Psi_{j3}(|x_j|)]^{1/2},\quad i=1,\cdots,N.\tag{4.6}$$

其中 $E_1=(e_{ij}^1)$和 $E_2=(e_{ij}^2)$均为时变关联矩阵，且 $E_1\in\overline{E}_1,E_2\in\overline{E}_2$；

3) 由下式定义的 $\overline{R}_1=(\bar{r}_{ij}^1)$是一个 $N\times N$ 维的 M-矩阵

$$\bar{r}_{ij}^1=\begin{cases}\sigma_i-\beta_i\bar{e}_{ii}^1a_{ii}, & j=i,\\ -\beta_ia_{ij}\bar{e}_{ij}^1, & j\neq i,\end{cases}\quad i,j=1,\cdots,N;\tag{4.7}$$

4) 随机过程$\{|\xi(t,\omega)|;t\geqslant 0\}$服从大数定律，且满足条件

$$\sup_{t\geqslant 0}E|\xi(t,\omega)|<\lambda_{1m}\alpha_2/(\lambda_{2M}\alpha_1).\tag{4.8}$$

其中

$$\alpha_1=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\{\alpha_{i1}/d_i\},\quad\alpha_2=\min_{1\leqslant i\leqslant N}\{\alpha_{i2}/d_i\}.\tag{4.9}$$

这里的 α_{i1},α_{i2}由假设 1)给出，$d_i>0(i=1,\cdots,N)$是使得 $D\overline{R}_1+\overline{R}_1^{T}D$ 为正定的对角矩阵 $D=\text{diag}\{d_1,\cdots,d_N\}$的非零对角元素，$\lambda_{1m}$和 λ_{2M}分别是 $D\overline{R}_1+\overline{R}_1^{T}D$ 和 $D\overline{R}_2+\overline{R}_2^{T}D$ 的最小和最大特征值，这里 $\overline{R}_1$ 由假设 3)给出，$\overline{R}_2=(\bar{r}_{ij}^2)$定义如下

$$\bar{r}_{ij}^2=\begin{cases}\delta_i+\beta_i\bar{e}_{ii}^2b_{ii}, & j=i,\\ \beta_i\bar{e}_{ij}^2b_{ij}, & j\neq i,\end{cases}\quad i,j=1,\cdots,N.\tag{4.10}$$

证 由假设 3)，R_1 是一个 $N\times N$ 维的 M-矩阵，根据引理 3.2，存在对角元素全为正数的对角形矩阵 $D=\text{diag}\{d_1,\cdots,d_N\}$，使得 $D\overline{R}_1+\overline{R}_1^{T}D$ 正定. 利用假设 1)中的函数 $V_i(t,x_i)$ $(i=1,\cdots,N)$，确定随机大系统(2.1)的李雅普诺夫函数为

$$V(t,x) = \sum_{i=1}^{N} d_i V_i(t,x_i). \tag{4.11}$$

对于假设 1)中给出的 $\Psi_{ij}(j=1,2,3;i=1,\cdots,N)$,令

$$\Psi_3(|x|) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_{i3}(|x_i|), \tag{4.12}$$

$$\Psi_j(|x|) = \sum_{i=1}^{N} d_i \Psi_{ij}(|x_i|), \quad j = 1,2. \tag{4.13}$$

则有 $\Psi_j \in \mathrm{KR}, j=1,2,3$,且有

$$\Psi_1(|x|) \leqslant V(x) \leqslant \Psi_2(|x|), \tag{4.14}$$

$$\alpha_2 \Psi_2(|x|) \leqslant \Psi_3(|x|) \leqslant \alpha_1 \Psi_1(|x|). \tag{4.15}$$

记

$$w = ([\Psi_{13}(|x_1|)]^{1/2}, \cdots, [\Psi_{N3}(|x_N|)]^{1/2})^{\mathrm{T}}. \tag{4.16}$$

利用假设 2)和 3),并利用(4.11)~(4.16),得

$$\begin{aligned}
\dot V_{(S)}(t,x) &= \sum_{i=1}^{N} \{\dot V_{i(S_i)}(t,x_i) + [\mathrm{grad} V_i(t,x_i)]^{\mathrm{T}}[g_i(t,x) + h_i(t,x)\xi]\} \\
&\leqslant - w^{\mathrm{T}}(R_1^{\mathrm{T}} D + D R_1) w + w^{\mathrm{T}}(R_2^{\mathrm{T}} D + D R_2) w |\xi| \\
&\leqslant - w^{\mathrm{T}}(\overline{R}_1^{\mathrm{T}} D + D \overline{R}_1) w + w^{\mathrm{T}}(\overline{R}_2^{\mathrm{T}} D + D \overline{R}_2) w |\xi| \\
&\leqslant (- \lambda_{1m}\alpha_2 + \lambda_{2M}\alpha_1 |\xi|) V, \quad \text{对所有 } E_k \in \overline{E}_k (k = 1,2).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

由(4.17)和假设 3),并根据引理 3.1 及定义 3.5,可知随机大系统(2.1)是大范围渐近随机关联稳定的. 证毕.

5 实　例

考虑由两个子系统组成的互联随机系统(S)

$$\begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y_1 & -2y_2 \\ 3y_1 & -4y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 & -2y_2 & 0 \\ 3y_1 & 4y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

$$\dot y_3 = - 4y_3 + (0 \quad 0 \quad 4y_3) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + (3y_1 + 3y_2) + (y_1 \quad y_2 \quad 0) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

互联随机系统(S)可认为是下面两个孤立子系统的相互联结

$$(S_1): \begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y_1 & -2y_2 \\ 3y_1 & -4y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 & -2y_2 & 0 \\ 3y_1 & 4y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

$$(S_2): \dot y_3 = - 4y_3 + (0 \quad 0 \quad 4y_3) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

对(S_1)和(S_2)分别选取李雅普诺夫函数为

$$V_1(x_1) = 3y_1^2 + 2y_2^2, \quad V_2(x_2) = y_3^2. \tag{5.4}$$

其中 $\quad x_1 = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}, \quad x_2 = y_3, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathrm{T}}.$

确定定理 4.1 假设 1)中的 $\Psi_{ij}(j=1,2,3;i=1,2)$如下

$$\Psi_{11}(|x_1|)=2(y_1^2+y_2^2),\quad \Psi_{12}(|x_1|)=3(y_1^2+y_2^2),\quad \Psi_{13}(|x_1|)=y_1^2+y_2^2,$$
$$\Psi_{21}(|x_2|)=\Psi_{22}(|x_2|)=\Psi_{23}(|x_2|)=y_3^2. \tag{5.5}$$

计算可得定理假设 1)～4)中的系数如下

$$\sigma_1=8,\quad \delta_1=9,\quad \sigma_2=4,\quad \delta_2=4,\quad \beta_1=3,\quad \beta_2=1,$$
$$\alpha_{11}=3,\quad \alpha_{12}=2,\quad \alpha_{21}=\alpha_{22}=1,$$
$$a_{11}=a_{22}=0,\quad a_{12}=\sqrt{5},\quad a_{21}=3\sqrt{2},$$
$$b_{11}=b_{22}=0,\quad b_{12}=\sqrt{2},\quad b_{21}=\sqrt{2},$$
$$\overline{R}_1=\begin{bmatrix}8 & -3\sqrt{5}\\ -3\sqrt{2} & 4\end{bmatrix},\quad \overline{R}_2=\begin{bmatrix}9 & 3\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 4\end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

由于 $\overline{R}_1$ 是一个 M-矩阵,故可选取

$$D=\mathrm{diag}\{1,1\}. \tag{5.7}$$

使得 $D\overline{R}_1+\overline{R}_1^TD$ 为正定的,计算定理 4.1 假设 4)中的系数得

$$\alpha_1=3,\quad \alpha_2=1,\quad \lambda_{1m}=12-\sqrt{79+2\sqrt{10}},\quad \lambda_{2M}=13+\sqrt{57}.$$

因此,根据定理 4.1,当$\{|\xi(t,\omega)|,t\geqslant 0\}$服从大数定律且

$$\sup_{t\geqslant 0}E|\xi(t,\omega)|<(12-\sqrt{79+2\sqrt{10}})/(39+3\sqrt{57})$$

时,互联随机系统(5.1)是大范围渐近随机关联稳定的.

6 结束语

本文通过对随机大系统的互联结构引入两个互联矩阵,提出了非 Ito 型随机大系统的大范围渐近随机关联稳定性,并给出了充分条件.

在本文的定理 4.1 中,如果把假设 4)中的"服从大数定律" 改为(加强为)"服从强大数定律"(见[8]),则可类似地给出大范围渐近几乎必然关联稳定性的概念和得到相应的结论(见[11]).

参 考 文 献

[1] Michel, A. N.. Stability Analysis of Stochastic Composite Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, AC-20: 246—250

[2] Ladde, G. S. and Siljak, D. D.. Connective Stability of Large-Scale Stochastic Systems. Int. J. Systems Sci., 1975, 6: 714—721

[3] Michel, A. N. and Miller, R. K.. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. Academic Press, New York, 1977

[4] Siljak, D. D.. Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure. Elsevier, Amsterdam, 1978

[5] Socha, L. and Popp, K.. The p-Moment Global Exponential Stability of Linear Large Scale Systems. Large Scale Systems, 1986, 10: 75—93

[6] Jumarie, G.. An Approach, via Entropy, to The Stability of Random Large-Scale Sampled-Data Systems under Structural Perturbations. Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1982, 104: 49—57

[7] Socha, L.. The Asymptotic p-Stability of Composite Stochastic Systems. Int. J. Systems Sci., 1986, 17: 465—477

[8] Has'minskii, R. H.. Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoff & Noordhhoff. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980

[9] 刘永清,宋中昆著.大型动力系统的理论与应用(卷 1)——分解、稳定与结构.广州:华南理工大学出版社,1988

[10] 刘永清,徐维鼎著.大型动力系统的理论与应用(卷 2)——建模、镇定与控制.广州:华南理工大学出版社,1989

[11] 冯昭枢.随机大系统的稳定性与镇定.华南理工大学自动化系博士学位论文,1990

Asymptotic Stochastic Connective Stability in the Large of Stochastic Large Scale Systems

FENG Zhaoshu and LIU Yongqing

(Department of Automation, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

HU Xuanda

(Department of Mathematics, Nanjing University · Nanjing, 210008, PRC)

Abstract: In this paper, by analyzing the isolated subsystems and the interconnecting structure of the stochastic large scale systems, and by introducing two interconnective matrices, the concept of asymptotic stochastic connective stability in the large of stochastic large scale systems of non-Ito type is proposed and the sufficient conditions are given. The stochastic noises of the stochastic large scale systems considered in this paper obey the law of large numbers. An example is given to illustrate the applicability of the obtained results.

Key words: stochastic large scale systems; stability; lyapunov function; law of large numbers; stochastic connective stability

本文作者简介

冯昭枢 1962年生.1990年在华南理工大学自动化系获博士学位,现在该系任讲师.已在国内外发表论文63篇,出版专著《大型动力系统的理论与应用(卷4)——随机·稳定与控制》,研究成果"随机大系统的稳定性与控制"获得1992年度国家教委科技进步二等奖.目前研究领域是时滞系统,随机系统与大系统的稳定性分析与镇定综合.

刘永清 1930年生.华南理工大学自动化系教授.博士生导师.1955年毕业于复旦大学数学系,1973年至1976年在华南理工大学学习化工仪表自动化专业.1984年10月被国务院劳动人事部列为国家级有突出贡献专家.是《控制理论与应用》、《控制与决策》、《应用数学》等期刊的编委,至今已在国内外发表论文二百多篇,其中39篇被收入美国《工程索引》(EI),40篇被收入英国《科学文摘》(SCA);出版《带有时滞的动力系统的运动稳定性》、《大型动力系统的理论与应用》(卷1～卷4)、《大系统的稳定、镇定与控制》(英文)等9部著作(包括合著);获得国家教委科技进步奖等9项部委以上的奖励.目前研究领域是系统工程与大系统理论.

胡宣达 1935年生.1960年毕业于山东大学数学系.现为南京大学数学系概率统计专业主任,研究生导师,副教授.已出版专著《随机微分方程稳定性理论》.目前的研究领域与兴趣为随机微分方程,随机系统稳定性理论与应用.