

线性定常系统仿真的广义增广矩阵法

金炜东

(西南交通大学电气工程系·成都, 610031)

摘要: 对于线性定常系统的数字仿真, 增广矩阵法是一种高精度快速算法. 本文给出了增广矩阵法的改进算法, 由此建立了基于增广矩阵法的一般仿真模型. 文中针对输入函数的不同情况给出了几种仿真计算模型. 容易推证, 原有的增广矩阵法乃是本文算法给出的仿真计算模型之一的一种特例.

关键词: 数字仿真; 线性定常系统; 增广矩阵法

1 引言

对于线性定常系统的数字仿真, 增广矩阵法通过将输入增广到状态量中, 使非齐次方程化为齐次方程求解. 由于指数矩阵 e^{Ax} 的数值计算可达到很高的精度, 步长 T 也可取得很大, 因而用增广矩阵法仿真精度高速度快. 且易进行变步长处理, 使其可应用于 Stiff 系统的仿真计算. 然而, 基于文[1]给出的方法, 使人感到建立增广矩阵法的计算模型似乎不太方便, 特别是对于多输入系统. 因而一般认为增广矩阵法仅适用于系统的输入为一些典型函数的情况^[2,3].

本文通过对系统输入的等效处理给出了增广矩阵法的改进算法. 该算法处理过程系统简便, 便于处理多输入系统及输入函数变化的情形, 并且容易获得阶数较低的增广矩阵. 针对输入函数的不同情况本文给出了几种仿真计算模型.

2 仿真模型 I

对于线性定常系统 $\Sigma 1$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BV(t), \\ Y(t) = CX(t) + DV(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $X(t) \in \mathbb{R}^n, V(t) \in \mathbb{R}^r, Y(t) \in \mathbb{R}^m, A, B, C, D$ 为相应维数的常数阵.

设 $V(t)$ 的每个分量 $v_i(t)$ 的 Laplace 变换 $V_i(s) (i=1, \dots, r)$ 均可写成 s 域的有理分式

$$V_i(s) = G_i(s)/H_i(s), \quad i = 1, \dots, r. \quad (3)$$

并设 p_i 为 $H_i(s)$ 的阶数. 由 $1(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, 有

$$V(s) = [V_1(s), \dots, V_r(s)]^T = V(s)1(s). \quad (4)$$

由(4)及(3)式可构造一个以 $V(t)$ 为输出、以冲激函数 $\delta(t)$ 为输入的原系统输入 $V(t)$ 的等效系统 $\Sigma 2$, 可描述为

$$\begin{cases} \dot{X}_a(t) = A_a X_a(t) + B_a \delta(t), \\ V(t) = C_a X_a(t) + D_a \delta(t). \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

其中 $X_a(t) \in \mathbb{R}^q, q \leq \sum_{i=1}^r p_i, A_a \in \mathbb{R}^{q \times q}, B_a \in \mathbb{R}^{q \times 1}, C_a \in \mathbb{R}^{r \times q}, D_a \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, 且 $X_a(0_-) = 0$.

原系统 $\Sigma 1$ 和输入等效系统 $\Sigma 2$ 构成等效仿真系统 $\Sigma 3$, 其系统方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}\delta(t), \\ Y(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t). \end{cases} \quad (7)$$

(8)

其中

$$\begin{cases} \tilde{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \dots \\ X_a(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+q}, \quad \tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A & BC_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}, \\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} BD_a \\ \dots \\ B_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times 1}, \quad \tilde{C} = [C \mid DC_a] \in \mathbb{R}^{m \times (n+q)}, \end{cases}$$

并考虑了对于实际系统 $DD_a = 0$.

由(7)式的解可得适于编程的仿真计算模型

$$\begin{cases} \tilde{X}(T) = e^{AT}[X(0_-) + \tilde{B}], \\ \tilde{X}((k+1)T) = e^{AT}\tilde{X}(kT). \end{cases} \quad (9)$$

(10)

3 仿真模型 II

考虑 $V(t)$ 中含有延时函数及含有分段连续函数的情况. 这时, 可将 $V(t)$ 写成

$$V(t) = \sum_{j=1}^L V_j(t - t_j)U(t - t_j). \quad (11)$$

其中 $t_j \geq 0, V_j(t) = [v_{1j}(t), \dots, v_{rj}(t)]^T \in \mathbb{R}^r, j = 1, \dots, L, U(t)$ 为单位阶跃函数.

$$V(s) = \sum_{j=1}^L V_j(s)e^{-t_j s}. \quad (12)$$

并设 $V_{ij}(s) \triangleq \mathcal{L}[v_{ij}(t)U(t)], i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, L$, 均可写成 s 域的有理分式

$$V_{ij}(s) = G_{ij}(s)/H_{ij}(s). \quad (13)$$

并设 p_{ij} 为 $H_{ij}(s)$ 的阶数. 在此情况下, 可给出输入 $V(t)$ 的等效系统

$$\begin{cases} \dot{X}_b(t) = A_b X_b(t) + \sum_{j=1}^L B_{bj} \delta(t - t_j), \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} V(t) = C_b X_b(t) + \sum_{j=1}^L D_{bj} \delta(t - t_j). \end{cases} \quad (15)$$

其中 $X_b(t) \in \mathbb{R}^Q, Q \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^L p_{ij}, A_b \in \mathbb{R}^{Q \times Q}, B_{bj} \in \mathbb{R}^{Q \times 1}, C_b \in \mathbb{R}^{r \times Q}, D_{bj} \in \mathbb{R}^{r \times 1}, j = 1, \dots, L$, 并有 $X_b(0_-) = 0$. 这时, 状态增广后等效仿真系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \sum_{j=1}^L \tilde{B}_j \delta(t - t_j), \\ Y(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t). \end{cases} \quad (16)$$

(17)

其中

$$\tilde{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \vdots \\ X_b(t) \end{bmatrix} \in R^{n+q}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & BC_b \\ 0 & A_b \end{bmatrix} \in R^{(n+q) \times (n+q)},$$

$$\tilde{B}_j = \begin{bmatrix} BD_{bj} \\ \vdots \\ B_{bj} \end{bmatrix} \in R^{(n+q) \times 1}, \quad (j = 1, \dots, L) \quad \tilde{C} = [C \quad DC_b] \in R^{m \times (n+q)}.$$

并考虑了对于实际系统 $DD_{bj}=0, j=1, \dots, L$.

(16)式的解为

$$\begin{cases} \tilde{X}(t) = e^{\lambda t} [\tilde{X}(0_-) + \sum_{j=1}^L \tilde{B}_j U(t - t_j)], & t \geq 0, \\ \tilde{X}(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \tilde{X}(t_0), & t_j < t_0 \leq t < t_{j+1}. \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{X}(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \tilde{X}(t_0), \quad t_j < t_0 \leq t < t_{j+1}. \quad (19)$$

由此,对于 $k=0, 1, 2, \dots$, 可得适于编程的仿真计算模型

$$\tilde{X}((k+1)T) = \begin{cases} e^{\lambda T} [\tilde{X}(kT) + \tilde{B}_j], & \text{当 } k = [t_j/T], \\ e^{\lambda T} \tilde{X}(kT), & \text{当 } k \neq [t_j/T]. \end{cases} \quad (20)$$

$$(21)$$

4 仿真模型 III

考虑 $V(t) \in R^r$ 不满足仿真模型 I 和仿真模型 II 的要求,但在离散点上可得到其函数值.

取 T 为计算步长, (1)式的解可写成

$$X((k+1)T) = e^{AT} X(kT) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B V(\tau + kT) d\tau. \quad (22)$$

可将 $BV(t)$ 写成

$$BV(t) = \sum_{i=1}^r B_i v_i(t). \quad (23)$$

其中 $B_i \in R^{n \times 1}$ 为 B 中的第 i 个列向量.

对于每一个输入 $v_i(t)$, $i=1, \dots, r$, 在 $[kT, (k+1)T]$ 上以 N 次多项式插值函数逼近 $v_i(\tau + kT)$, 即

$$v_i(\tau + kT) = \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(kT) \frac{\tau^j}{j!} + R_N(v, \tau). \quad (24)$$

其中 $R_N(v, \tau)$ 为插值余项, $\alpha_{ij}(kT)$ 由 $v_i(t)$ 在某些离散点上的函数值给出. 于是, 略去插值余项, 可得

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)} B V(\tau + kT) d\tau = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^N X_{ij}(T) \alpha_{ij}(kT). \quad (25)$$

其中 $X_{ij}(T) \in R^n$ 为

$$X_{ij}(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B_i \frac{\tau^j}{j!} d\tau. \quad (26)$$

根据前面对仿真模型 I 的讨论, 类似于 (9) 式, 由 $X_{ij}(0_-) = 0$, 可给出 $\tilde{X}_{ij}(T) \in R^{n+j+1}$

$$\tilde{X}_{ij}(T) = \begin{bmatrix} X_{ij}(T) \\ \vdots \\ X_{aj}(T) \end{bmatrix} = e^{\lambda_j T} \tilde{B}_j. \quad (27)$$

式中

$$\tilde{B}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+j+1) \times 1}, \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A & B_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_j \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+j+1) \times (n+j+1)}.$$

其中 I_j 为 j 级单位阵.

记 $n+j+1$ 级方阵 $e^{\tilde{A}_{ij}T} = [E_{ij}(p, q)]$, 则对于 $i=1, \dots, r; j=0, 1, \dots, N$, 可得

$$X_{ij}(T) = [E_{ij}(p, n+j+1)], \quad p = 1, \dots, n. \quad (28)$$

于是可给出(22)式的计算模型.

下面以三次 Hermite 样条函数在 $[kT, (k+1)T]$ 上逼近 $V(\tau+kT)$, 给出一组具体的计算公式.

对于 $k=0, 1, 2, \dots$, 设 $V(kT)$ 和 $\dot{V}(kT)$ 存在. 根据三次 Hermite 样条函数构造公式^[4], (24)式中, $N=3$, 可确定系数 $\alpha_{ij}(kT)$ ($j=0, 1, 2, 3; i=1, \dots, r$)

$$\begin{cases} \alpha_{i0}(kT) = v_i(kT), \\ \alpha_{i1}(kT) = \dot{v}_i(kT), \\ \alpha_{i2}(kT) = \frac{2}{T^2}[-3v_i(kT) + 3v_i((k+1)T) - 2T\dot{v}_i(kT) - T\dot{v}_i((k+1)T)], \\ \alpha_{i3}(kT) = \frac{6}{T^3}[2v_i(kT) - 2v_i((k+1)T) + T\dot{v}_i(kT) + T\dot{v}_i((k+1)T)]. \end{cases} \quad (29)$$

于是可给出这种情况下的一个仿真计算模型

$$X((k+1)T) = e^{AT}X(kT) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^3 X_{ij}(T) \alpha_{ij}(kT). \quad (30)$$

其中 $\alpha_{ij}(kT)$ 由(29)式给出, $X_{ij}(T)$ 由(28)式给出 ($N=3$), 与 k 无关, 在仿真开始时计算一次即可.

在根据仿真模型 III 编程计算时, 注意到矩阵 $\tilde{A}_{ij}$ 的特点, 可减少一些计算量.

5 算 例

本文的三个仿真计算模型都经过多个算例的验证. 这里仅举两例.

例 1

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 3/8 & 3/4 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} U(t), \\ Y(t) &= [0 \quad 1 \quad 2]X(t). \end{aligned}$$

对于仿真模型 I, 可根据能控规范形取一个二阶的输入等效系统

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_a = 0.$$

e^{At} 的计算为取其级数展开式的前 $P+1$ 项(下例同). 该系统最小时间常数为 0.2 秒, 最大时间常数为 1 秒. 表 1 给出了计算结果, 其中 $Y(I)$, $Y(III)$ 分别代表根据仿真模型 I 和仿真模型 III 计算的结果, Y^* 为根据解析解算出的精确解.

表 1 例 1 的计算结果

T_s	$Y(I)$		$Y^\#$	$Y(II)$	
	$T=1, P=20$	$T=2, P=50$		$T=0.2, P=10$	$T=1, P=20$
1	0.697555		0.6975519	0.6975272	0.6821651
2	-0.6142302	-0.6142995	-0.6142302	-0.6142085	-0.6005882
3	-0.3427368		-0.3427365	-0.3427245	-0.336714
4	0.8409792	0.8409749	0.8409792	0.8409495	0.823067
5	-0.3787354		-0.3787358	-0.3787224	-0.3695769
6	-0.5336808	-0.5336821	-0.5336806	-0.5336618	-0.5232908
7	0.8200006		0.8200008	0.8199718	0.8022313
8	-0.1498724	-0.149871	-0.1498729	-0.1498675	-0.1454598
9	-0.6956571		-0.695657	-0.6956323	-0.6815555
10	0.7287183	0.7287172	0.7287186	0.7286928	0.7125709

例 2

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 3/8 & 3/4 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(t),$$

$$Y(t) = [0 \ 1 \ 2] X(t).$$

其中 $v(t)$ 由图 1 给出, 可写成

$$\begin{aligned} v(t) &= (1 + 0.5t)U(t) - 0.5(t-2)U(t-2) - 3U(t-3) \\ &\quad + (t-4)U(t-4) - (t-5)U(t-5) \\ &= \sum_{j=1}^5 v_j(t-t_j)U(t-t_j). \end{aligned}$$

可构造一个输入等效系统(图 2)

$$\dot{X}_b(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_b(t) + \sum_{j=1}^5 B_{bj} \delta(t-t_j), \quad v(t) = [1 \ 0] X_b(t).$$

其中

$$B_{bj} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{bmatrix},$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = 3,$$

$$t_4 = 4, \quad t_5 = 5,$$

$$B_{b1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_{b2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_{b3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{b4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{b5} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

表 2 给出了计算结果(取 $T=1, P=20$), 其中 $Y^\#$ 为精确解。

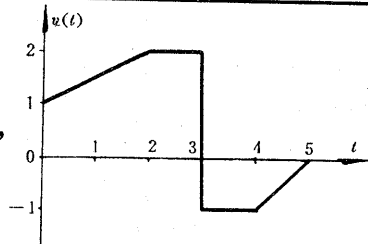
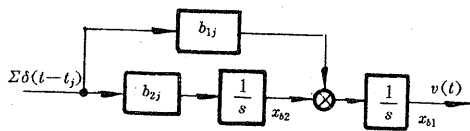
图 1 例 2 的输入 $v(t)$ 

图 2 例 2 的输入等效系统

表 2 例 2 的计算结果

T_n	$Y(T=1, P=20)$	$Y_{\#}$
1	1.074549	1.074546
2	2.104681	2.104681
3	2.782604	2.782603
4	0.445533	0.4455419
5	-0.429348	-0.429348
6	-0.1866243	-0.1866255
7	-6.884875E-02	-6.884766E-02
8	-2.532935E-02	-2.532768E-02
9	-9.318158E-03	-9.319306E-03
10	-3.42796E-03	-3.427506E-03

6 结 语

由本文的工作可见,对于线性定常系统的数字仿真,这类通过状态增广简化积分运算的方法有着广泛的适用性,其计算模型也不局限于原有的形式,如本文的仿真模型Ⅲ.故且将本文的改进算法称作广义增广矩阵法.本文实际上给出了基于增广矩阵法的一般仿真计算模型.容易验证,原有的增广矩阵法^[1,2]乃是本文仿真模型Ⅰ的一种特例.

对于线性定常系统的仿真计算,本文仿真模型Ⅰ和仿真模型Ⅱ的性能明显优于四阶 Runge-Kutta 法等积分算法.仿真模型Ⅲ的主要误差源于多项式函数逼近 $V(\tau+KT)$ 的截断误差.采用不同的多项式插值方法得到的系数 $\alpha_{ij}(KT)$ 也将不同.文中利用三次 Hermite 样条函数给出的计算模型(30)具有四阶精度,其插值余项 $R_3(v, \tau)$ 较小^[4],其系数 $\alpha_{ij}(KT)$ 的确定只用到 $[KT, (k+1)T]$ 上两端点的输入函数值及其导函数值,没有计算启动问题.略加分析不难比较,仿真模型Ⅲ与文[5]算法的性能基本相当,而仿真模型Ⅰ的性能明显优越,精度要高得多,且步长还可取得大得多.作者用仿真模型Ⅰ和仿真模型Ⅲ计算了文[5]中的例,算例的验证亦是如此.

参 考 文 献

- [1] Taylor, Fred J.. Transient Response Analysis of Linear Differential Systems on Minicomputers. Simulation, 1977, 28 (1):17-21
- [2] 熊光楞. 控制系统数字仿真. 北京:清华大学出版社,1982, 71-73
- [3] 汪瑞芳,陈东义. 连续系统仿真及应用技术. 重庆:重庆大学出版社,1991,117-125
- [4] 李岳生,黄友谦. 数值逼近. 北京:人民教育出版社,1978,132-177
- [5] 蒋珉等. 线性定常系统仿真的改进转移矩阵法. 控制理论与应用,1989,6(1):76-80

A Generalized Augmented Matrix Algorithm for the Simulation of Linear Time-Invariant System

JIN Weidong

(Department of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University • Chengdu, 610031, PRC)

Abstract: For the simulation of linear time-invariant system, the augmented matrix algorithm is of high accuracy and speed. In this paper, a modified augmented matrix algorithm is put forward and a general model of the digital simulation based on the augmented matrix algorithm is presented. Several numerical formulas are given in this paper. In fact, the original augmented matrix algorithm is a special example of the algorithm in this paper.

Key words: digital simulation; linear time-invariant system; augmented matrix algorithm

本文作者简介

金炜东 1957年生, 1982年于西南交通大学自动控制专业毕业后留校任教, 现为该校电气工程系讲师、在职博士生, 兼任四川省系统仿真学会理事。在学术刊物及国际会议上发表论文十余篇。主要研究兴趣为系统仿真, 神经元网络等。