第10卷第2期
1993年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.10, No.2
Apr., 1993

非标准奇异摄动系统的标准分解*

黄 一 许可康
(中国科学院系统科学研究所·北京,100080)

摘要:本文讨论了非标准奇异摄动系统的标准化问题,给出了两条基本假设.在满足这两条假设的前提下,给出了化为标准形式的坐标变换阵.对线性奇异摄动控制系统,还讨论了在状态反馈作用下能标准化的情形.

关键词:标准形式的奇异摄动系统

1 引 言

对于具有多重时间尺度的奇异摄动控制系统来说,首要的问题是建立好具有标准形式的数学模型,然后根据奇异摄动系统的基本特性,分解成外解和边界层校正项各自满足的低价模型,来寻找满足原问题的具有所需精度的近似解.

即使是一个线性奇异摄动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + A_2z, \\ \varepsilon\dot{z} = A_3x + A_4z, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

它的慢、快变分解能成立的前提是:A_4 非异.一旦 A_4 是一个奇异阵,则在系统(1.1)形式下就不能直接进行慢、快变分解.前者(A_4 非异)称为系统(1.1)为标准的;后者则称为非标准的.

本文讨论非标准奇异摄动控制系统的标准化问题,给出了在一定的条件下,可以将非标准奇异摄动控制系统,转变为标准形式下的奇异摄动控制系统.

2 非标准线性奇异摄动系统的标准化

这一节,我们先考察线性奇异摄动系统的情形.设有系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(\varepsilon)x + A_{12}(\varepsilon)z + B_1(\varepsilon)u, \\ \varepsilon\dot{z} = A_{21}(\varepsilon)x + A_{22}(\varepsilon)z + B_2(\varepsilon)u. \end{cases} \tag{2.1}$$

这里 $x\in R^n, z\in R^m, 0<\varepsilon\ll 1$,

$$A_{ij}(\varepsilon) = A_{ij}^{(0)} + A_{ij}^{(1)}\varepsilon + A_{ij}^{(2)}\varepsilon^2 + \cdots, \quad \forall\, i,j = 1,2,$$
$$B_i(\varepsilon) = B_i^{(0)} + B_i^{(1)}\varepsilon + B_i^{(2)}\varepsilon^2 + \cdots, \quad i = 1,2.$$

如果 $A_{22}^{(0)}$ 非异,则系统(2.1)的慢、快分解易得.现来讨论 $A_{22}^{(0)}$ 是奇异阵的情形.

先讨论 $u\equiv 0$ 时的情形.设

$$\mathrm{rank}A_{22}^{(0)} = m_1 < m. \tag{2.2}$$

引入坐标变换

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1991年7月11日收到.1992年3月18日收到修改稿.

$$z = T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad |T| \neq 0. \tag{2.3}$$

这里 $z_1 \in \mathrm{R}^{m-m_1}$，$z_2 \in \mathrm{R}^{m_1}$，非异阵 T 满足

$$T^{-1}A_{22}(\varepsilon)T = \begin{bmatrix} A_{221}(\varepsilon) & A_{222}(\varepsilon) \\ A_{223}(\varepsilon) & A_{224}(\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

其中 $A_{221}^{(0)}=0$，$A_{222}^{(0)}=0$. 这时，系统(2.1)的第二个式子在变换(2.3)可变成

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\dot{z}_1 \\ \varepsilon\dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{211}(\varepsilon) & A_{221}(\varepsilon) & A_{222}(\varepsilon) \\ A_{212}(\varepsilon) & A_{223}(\varepsilon) & A_{224}(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，由于 $A_{221}^{(0)}=0$ 及 $A_{222}^{(0)}=0$，(2.4)式的第一个式子为

$$0 = A_{211}^{(0)} x_s(t). \tag{2.5}$$

上式要求在任一时刻 t，有 $\quad x_s(t) = \lambda(t)\alpha.$

这里，$A_{221}^{(0)}\alpha=0$. 这是一类非常特殊的系统，除此之外，为使(2.5)式成立，我们总假定

$$A_{211}^{(0)} = 0.$$

亦即，对系统(2.1)，我们总假定

$$\mathrm{rank}[A_{21}^{(0)} \quad A_{22}^{(0)}] = \mathrm{rank}A_{22}^{(0)} = m_1, \tag{AL I}$$

或在系统(2.4)中，有

$$A_{211}^{(0)} = 0, \quad A_{221}^{(0)} = 0, \quad A_{222}^{(0)} = 0. \tag{2.6}$$

因此 z_1 满足的微分方程可表示成

$$\dot{z}_1 = (A_{211}^{(1)} + \mathscr{O}_{(\varepsilon)})x + (A_{221}^{(1)} + \mathscr{O}_{(\varepsilon)})z_1 + (A_{222}^{(1)} + \mathscr{O}_{(\varepsilon)})z_2. \tag{2.7}$$

这时，如果 $A_{224}^{(0)}$非异，则在假设(AL I)成立的前提下，原系统就是一个具有$(n+m-m_1)$维慢变量及 m_1 维快变量的标准的线性奇异摄动系统.

由线性代数理论知，在 $A_{221}^{(0)}=0$ 及 $A_{222}^{(0)}=0$ 的前提下，要求 $A_{224}^{(0)}$非异等价于在(AL I)前提下，下列假设

$$\mathscr{R}(A_{22}^{(0)}) \oplus \mathscr{N}(A_{22}^{(0)}) = \mathrm{R}^m. \tag{AL II}$$

这里 $\mathscr{R}(\cdot)$表示某算子的值空间，$\mathscr{N}(\cdot)$表示某算子的零空间.

在假设(AL I)成立的时候，我们引入 $m_1\times(n+m)$阶矩阵 Q：它的行向量的全体是$[A_{21}^{(0)} \quad A_{22}^{(0)}]$的行向量张成的子空间的一组基. 记

$$Q \triangleq [Q_1 \quad Q_2], \tag{2.8}$$

Q_2 是 $m_1\times m$ 阶阵. 再引入满足

$$P[A_{21}^{(0)} \quad A_{22}^{(0)}] = 0 \tag{2.9}$$

的$(m-m_1)\times m$ 阶阵 P. 即 P 的行向量张成了$[A_{21}^{(0)} \quad A_{22}^{(0)}]$的左零空间. 则我们有

命题 2.1 在假设(AL I)与(AL II)成立的前提下，由(2.8)与(2.9)式引入的$\begin{bmatrix} P \\ Q_2 \end{bmatrix}$是非异阵.

证 不失一般性，可设 $\quad Q_2 = [A_{223}^{(0)} \quad A_{224}^{(0)}]T^{-1}.$

而由(2.9)式有 $\quad PT = [I_{m-m_1} \quad 0].$

于是
$$\begin{bmatrix} P \\ Q_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} PT \\ Q_2T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m-m_1} & 0 \\ A_{223}^{(0)} & A_{224}^{(0)} \end{bmatrix}$$
是一个非异阵. 因此命题得证.

这样,我们引入
$$\begin{cases} \bar{x} \triangleq \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m-m_1}, \\ \bar{z} \triangleq [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m_1}. \end{cases} \tag{2.10}$$
则有

定理 2.2 对线性奇异摄动系统(2.1),如果假设(AL Ⅰ)与(AL Ⅱ)成立. 则可由变换(2.10)将非标准的系统(2.1)化为标准形式的奇异摄动系统.

证 由于$\begin{bmatrix} P \\ Q_2 \end{bmatrix}$为非异阵,设
$$\begin{bmatrix} P \\ Q_2 \end{bmatrix} = [V \quad W],$$
$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P \\ Q_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -WQ_1 & (V \quad W) \end{bmatrix},$$
则系统(2.1)在变换(2.10)下变成
$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \varepsilon\dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(\varepsilon) & \bar{A}_{12}(\varepsilon) \\ \bar{A}_{21}(\varepsilon) & \bar{A}_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$
其中
$$\bar{A}_{11}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} A_{11}(\varepsilon) - A_{12}(\varepsilon)WQ_1 & A_{12}(\varepsilon)V \\ PA_{21}(\varepsilon)/\varepsilon - PA_{22}(\varepsilon)WQ_1/\varepsilon & PA_{22}(\varepsilon)V/\varepsilon \end{bmatrix},$$
$$\bar{A}_{12}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} A_{12}(\varepsilon)W \\ PA_{22}(\varepsilon)W/\varepsilon \end{bmatrix},$$
$$\bar{A}_{21}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon Q_1(A_{11}(\varepsilon) - A_{12}(\varepsilon)WQ_1) & \varepsilon Q_1A_{12}(\varepsilon)V \\ + Q_2(A_{21}(\varepsilon) - A_{22}(\varepsilon)WQ_1) & + Q_2A_{22}(\varepsilon)V \end{bmatrix},$$
$$\bar{A}_{22}(\varepsilon) = \varepsilon Q_1A_{12}(\varepsilon)W + Q_2A_{22}(\varepsilon)W.$$
显然,有
$$\bar{A}_{11}^{(0)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(0)} - A_{12}^{(0)}WQ_1 & A_{12}^{(0)}V \\ PA_{21}^{(1)} - PA_{22}^{(1)}WQ_1 & PA_{22}^{(1)}V \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12}^{(0)} = \begin{bmatrix} A_{12}^{(0)}W \\ PA_{12}^{(1)}W \end{bmatrix},$$
$$\bar{A}_{21}^{(0)} = [Q_2A_{21}^{(0)} - Q_2A_{22}^{(0)}WQ_1 \quad Q_2A_{22}^{(0)}V], \quad \bar{A}_{22}^{(0)} = Q_2A_{22}^{(0)}W.$$
即
$$\bar{A}_{22}^{(0)} = Q_2TT^{-1}A_{22}^{(0)}TT^{-1}W = [A_{223}^{(0)} \quad A_{224}^{(0)}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{223}^{(0)} & A_{224}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{224}^{(0)-1} \end{bmatrix} = A_{224}^{(0)}$$
是非异阵. 所以,系统(2.11)是标准形式的奇异摄动系统.

借助于控制 u 的状态反馈作用,我们还可以把非标准奇异摄动系统能标准化的范围再扩大一些.

对原系统(2.1),记

$$\hat{A}_{22}(\varepsilon) \triangleq A_{22}(\varepsilon) + B_2(\varepsilon)K_2. \tag{2.12}$$

只要存在着某一个 K_2,用 $\hat{A}_{22}^{(0)}$ 代替(AL Ⅰ)与(AL Ⅱ)中的 $A_{22}^{(0)}$. 则上述标准化的过程可应用到经控制律

$$u = K_2 z + v \tag{2.13}$$

作用后的闭环系统中去.

3 非标准非线性奇异摄动系统的标准化

为简单起见,不考虑控制 u 的作用. 考察

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,z,\varepsilon), & x \in \mathrm{R}^n, \\ \varepsilon\dot{z} = g(x,z,\varepsilon), & z \in \mathrm{R}^m. \end{cases} \tag{3.1}$$

假定在非线性奇异摄动系统(3.1)中

$$\mathrm{rank}\frac{\partial g(x,z,0)}{\partial z}\bigg|_{g(x,z,0)=0} = m_1 < m. \tag{3.2}$$

这样,由

$$g(x,z,0) = 0 \tag{3.3}$$

确定了在 R^{n+m} 空间上的一个 n_1 维流形 M_0. 即对 m 维方程(3.3)可找到 m_1 个独立的方程

$$\theta(x,z) = 0, \tag{3.4}$$

使对一切 $(x,z)\in M_0$,方程(3.3)与方程(3.4)等价. 这里

$$n_1 + m_1 = n + m.$$

假设

$$\mathrm{rank}\left[\frac{\partial g(x,z,0)}{\partial x} \quad \frac{\partial g(x,z,0)}{\partial z}\right]\bigg|_{M_0} = \mathrm{rank}\frac{\partial g(x,z,0)}{\partial z}\bigg|_{M_0} = m_1. \tag{AN Ⅰ}$$

这时,必有

$$\mathrm{rank}\frac{\partial\theta(x,z)}{\partial z}\bigg|_{M_0} = m_1. \tag{3.5}$$

且存在 $(m-m_1)$ 维向量 $\sigma(x,z)$ 满足

$$\frac{\partial\sigma(x,z)}{\partial z}g(x,z,0) = 0, \quad \forall\ (x,z) \in S. \tag{3.6}$$

这里 S 是 R^{n+m} 中的一个紧致集.

对 $\sigma(x,z)$,我们假设

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\sigma(x,z)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\theta(x,z)}{\partial z} \end{bmatrix} = m, \quad \forall\ (x,z) \in S. \tag{AN Ⅱ}$$

这时,与线性情形相类同,我们有

定理 3.1　对非线性奇异摄动系统(3.1),如果存在满足条件(3.6)式的 $\sigma(x,z)$,假设(AN Ⅰ)及(AN Ⅱ)成立. 则该系统可化为具有 n_1 维慢变量的标准形式的奇异摄动系统.

事实上,变换

$$\begin{cases} \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \sigma(x,z) \end{bmatrix}, \\ \bar{z} = \theta(x,z). \end{cases} \tag{3.7}$$

分别给出了系统(3.1)的 $n_1 = n + m - m_1$ 维慢变量 $\bar{x}$ 及 m_1 维快变量 $\bar{z}$. 这时

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} f(x,z,\varepsilon) \\ \dfrac{\partial\sigma(x,z)}{\partial x} f(x,z,\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\sigma(x,z)}{\partial z} g(x,z,\varepsilon) \end{pmatrix} \triangleq \bar{f}(\bar{x},\bar{z},\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{\bar{z}} = \varepsilon\dfrac{\partial\theta(x,z)}{\partial x} f(x,z,\varepsilon) + \dfrac{\partial\theta(x,z)}{\partial z} g(x,z,\varepsilon) \triangleq \bar{g}(\bar{x},\bar{z},\varepsilon). \end{cases} \tag{3.8}$$

我们易证

命题 3.2　在奇异摄动系统(3.8)中

$$\left.\frac{\partial\bar{g}(\bar{x},\bar{z},0)}{\partial\bar{z}}\right|_{\bar{g}(\bar{x},\bar{z},0)=0}$$

是非异阵.

4 结　论

本文讨论了非标准奇异摄动系统的标准化问题. 在线性系统中,我们给出了两条基本假设(AL Ⅰ)及(AL Ⅱ). 凡满足这两条假设的线性奇异摄动系统,均可化为标准形式. 文中还给出了对应的坐标变换. 我们还进一步讨论了利用状态反馈进行标准化的问题. 讨论结果表明:在舍去$(A_{22}^{(0)},B_2^{(0)})$能控部分后剩余系统仍满足相应的假设(AL Ⅰ)及(AL Ⅱ). 则可利用状态反馈(2.13)及相应的坐标变换,把原系统化为标准形式.

本文还讨论了非线性奇异摄动系统的标准化问题. 并且给出了相应的两条基本假设(AN Ⅰ)及(AN Ⅱ). 当系统满足这两条假设时,我们还给出了将原系统化为标准形式所需的坐标变换. 限于篇幅,这部分的有关证明略.

参 考 文 献

[1] Kokotovic, P. V., Khalil, H. K. and O'Reilly, J.. Singular Perturbation Methods in Control: Anzlysis and Design. Academic Press, London, 1986

Standard Decomposition of Nonstandard Singularly Perturbed Systems

HUANG Yi　and　XU Kekang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: The typical assumption of the theorem of singularly perturbed systems is to require that the two-time-scale model be the standard form. The paper discusses how to find slow and fast states of a nonstandard system and get standard decomposition of the original system.

Key words: standard singularly perturbed systems

本文作者简介

黄　一　1967 年生. 1989 年毕业于华中理工大学. 同年在中国科学院系统科学研究所攻读硕士学位. 1992 年在东南大学自动化研究所攻读博士学位. 主要研究兴趣为未建模系统,奇异摄动系统的鲁棒控制.

许可康　1941 年生. 1962 年毕业于南开大学数学力学系. 1974 年起调入中国科学院数学所,现在中国科学院系统科学研究所系统分析与控制室工作. 1978 年为助理研究员,1982 年为副研究员,1990 年为研究员. 主要从事奇异摄动控制系统,奇异(广义)系统及线性控制系统理论的研究.