最小实现的直接实现法

周　洪

(武汉水利电力学院热动系，430072)

摘要：本文介绍从传递函数阵中，分解出同行、同列中的元素两两互质的传递函数阵，以及对角传递函数阵，从而直接得出最小实现的方法

关键词：最小实现；互质；直接实现

1　引　言

最小实现问题，通常是找到完全能控(或完全能观)的实现，然后化成能观(或能控)相伴标准形，这样获得完全能控、完全能观部分，从而得到最小实现[1]. 这种实现方法需要作大量的复杂的计算工作.

对此，本文将提出一种新的构造最小实现的方法，能大大地简化计算工作量；同时，在实现过程中，具有明显的物理意义.

2　基本原理

设传递函数阵 $G(s)(m\times n)$，阵中的元素均严格真的有理式.

定义1　对传递函数阵 $G(s)$ 的单个非0元素的进行的对角实现，约当规范形实现，能控(能观)规范形实现称为基本实现. 其中，对角实现对应于不同实根振型，约当规范形实现对应于重根振型，能控(能观)规范形实现对应于共轭复根振型.

定义2　传递函数矩阵中的所有基本实现组成直接实现.

定理1　若传递函数阵中，同行中的元素两两互质；同时，同列中的元素也两两互质，那么该传递函数矩阵的直接实现为该传递函数阵的一个最小实现.

证　设：　$G(s)=[G_{ij}(s)],\quad i=1\sim m,\quad j=1\sim n,$

且　$Y(s)=[y_1(s),\cdots,y_m(s)]^{\mathrm T},\quad U(s)=[u_1(s),\cdots,u_n(s)]^{\mathrm T},\quad Y(s)=G(s)U(s).$

任选一行 y_i

$$y_i=G_{i1}u_1+\cdots+G_{ip}u_p+\cdots+G_{iq}u_q+\cdots+G_{in}u_n,\quad (i=1,2,\cdots,m).$$

其中 G_{ip},G_{iq} 是传递函数矩阵中同行中的任意两个元素.

设
$$y_i=G_{ip}u_p+G_{iq}u_q+\sum_{\substack{t=1\\t\neq p,q}}^{n}G_{it}u_t.$$

又设 $G_{ip}(s),G_{iq}(s)$ 分别为 $g_{ip}(s)/[(s-a_{ip})P(s)],g_{iq}(s)/[(s-a_{iq})Q(s)]$.

其中 $P(s)=(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_r),a_{ip},\ a_1\cdots a_r$ 互异；$Q(s)=(s-b_1)(s-b_2)\cdots(s-b_s),a_{iq},$ $b_1\cdots b_s$ 互异；且 $a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_s$ 互异，则

本文于1992年3月20日收到. 1992年12月16日收到修改稿.

$$
\begin{cases}
G_{ip}(s) = \dfrac{c_{ip}}{s-a_{ip}} + \dfrac{c_1}{s-a_1} + \cdots + \dfrac{c_r}{s-a_r}, \\[2ex]
G_{iq}(s) = \dfrac{c_{iq}}{s-a_{iq}} + \dfrac{d_1}{s-b_1} + \cdots + \dfrac{d_s}{s-b_s}.
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 c_{ip}, $c_1\cdots c_r, c_{iq}, d_1\cdots d_s$ 均为非 0 常数. 又设 $y_{it}=G_{it}u_t$,则 $y_i=\sum\limits_{t=1}^{n} y_{it}$. 由式(1)可得

$$
\dot{X}_p = \begin{bmatrix} a_{ip} & & & \\ & a_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_r \end{bmatrix} X_p + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_p, \quad y_{ip} = [c_{ip}\ c_1\ \cdots\ c_r] X_p,
$$

$$
\dot{X}_q = \begin{bmatrix} a_{iq} & & & \\ & b_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & b_s \end{bmatrix} X_q + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_q, \quad y_{iq} = [c_{iq}\ d_1\ \cdots\ d_s] X_q.
$$

令 $X_u=[X_p^{\mathrm{T}}\ X_q^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,则

$$
\dot{X}_u = \begin{bmatrix} a_{ip} & & & & & & \\ & a_1 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_r & & & \\ & & & & a_{iq} & & \\ & & & & & b_1 & \\ & 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & & b_s \end{bmatrix} X_u + \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \vdots & 0 \\ 1 & \\ \hdashline & 1 \\ 0 & \vdots \\ & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_p \\ u_q \end{bmatrix},
$$

$$
y_u = y_ip + y_iq = [c_{ip}\ c_1\ \cdots\ c_r\ c_{iq}\ d_1\ \cdots\ d_s] X_u. \tag{2}
$$

现分析上式(2)的完全能控,完全能观性.

$Q_k = [B\ AB\ \cdots\ A^{r+s+1}B] =$

$$
\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c}
1 & & a_{ip} & & & a_{ip}^{r+s+1} & \\
 & & a_1 & & & a_1^{r+s+1} & \\
\vdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & \vdots & 0 \\
1 & & a_r & & & a_r^{r+s+1} & \\ \hdashline
 & 1 & & a_{iq} & & & a_{iq}^{r+s+1} \\
 & \vdots & & b_1 & & & b_1^{r+s+1} \\
0 & \vdots & 0 & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\
 & 1 & & b_s & & & b_s^{r+s+1}
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc:cccc}
1 & a_{ip} & \cdots & a_{ip}^{r+s+1} & & & & \\
\vdots & a_1 & & a_1^{r+s+1} & & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & & \\
1 & a_r & \cdots & a_r^{r+s+1} & & & & \\ \hdashline
 & & & & 1 & a_{iq} & \cdots & a_{iq}^{r+s+1} \\
 & & & & \vdots & b_1 & & b_1^{r+s+1} \\
 & 0 & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & 1 & b_s & \cdots & b_s^{r+s+1}
\end{array}\right].
$$

只要 a_{ip}, $a_1\cdots a_r$ 互异；a_{iq}, $b_1\cdots b_s$ 互异，则 Q_k 满秩.

$$Q_g=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{r+s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{ip} & c_1 & \cdots & c_r & c_{iq} & d_1 & \cdots & d_s \\ c_{ip}a_{ip} & c_1a_1 & & c_ra_r & d_{iq}a_{iq} & d_1b_1 & & d_sb_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{ip}a_{ip}^{r+s+1} & c_1a_1^{r+s+1} & \cdots & c_ra_r^{r+s+1} & c_{iq}a_{iq}^{r+s+1} & d_1b_1^{r+s+1} & \cdots & d_sb_s^{r+s+1}\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{ip} & a_1 & & a_r & a_{iq} & b_1 & & b_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ip}^{r+s+1} & a_1^{r+s+1} & \cdots & a_r^{r+s+1} & a_{iq}^{r+s+1} & b_1^{r+s+1} & \cdots & b_s^{r+s+1}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

若 $a_{ip}=a_{iq}$,(3)表示的矩阵不满秩. 若 $a_{ip}\neq a_{iq}$,(3)表示的矩阵为范得蒙矩阵，该矩阵满秩.

只要 $a_{ip}\neq a_{iq}$,以上实现(2)式为一最小实现.

同理，可以对同行中有重根振型，或共轭复根振型得出同样的结论.

用同样的方法，可以得出同列中的有不同实根、或重根，或共轭复根振型时同上一样的结论.

综合上述分析，定理1得证.

定理 2　对于所假定的元素为严格真有理式的传递函数阵 $G(s)$，可以将其分解成

$$G(s)=G_0(s)+G_l(s)+G_n(s). \tag{4}$$

其中 $G_0(s)$中的所有非0元素同行两两互质；同列两两互质；$G_l(s)=\sum_{i=1}^{n}G_{il}(s)$，$G_{il}(s)$为同列元素中，至少两个元素相同的矩阵，$G_{il}(s)=D_iG_{i0}(s)$，$G_{i0}(s)$为对角阵，$D_i$ 为常数阵；$G_n(s)=\sum_{i=1}^{m}G_{jn}(s)$，$G_{jn}(s)$为同行元素中，至少两个元素相同的矩阵，$G_{jn}(s)=G_{j0}(s)D_j$，$G_{j0}(s)$为对角阵，$D_j$ 为常数阵.

证　略.

定理 3　对 $G_{j0}(s)$的直接实现，即为最小实现 $\Sigma_0=(A,B,C)$，则 $\Sigma_l=(A,B,D_l'C)$为 $G_{il}(s)$的一个最小实现. 其中

$$D_l'=\begin{bmatrix} \alpha\left\{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right. & \beta\left\{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right. & \begin{matrix}\cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & \gamma\left\{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right. \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}_{m\times r},\quad D_l=[D'\ \vdots\ 0]=D_i.$$

证　略.

推论　由对偶性原理，对 $G_{j0}(s)$的直接实现即最小实现为 $\Sigma_0=(A,B,C)$，则 $\Sigma_n=(A,BD_n',C)$为 $G_{jn}(s)$的一个最小实现.

定理 4　如果系统 $\Sigma_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\Sigma_2=(A_2,B_2,C_2)$均为最小实现，且 A_1，A_2没有相同的特征根(即使有相同的特征根，经对角规范形，或约当规范形变换后，该特征根对应 B_1'

中的 B_{i1}^*，B_2^* 中的 B_{j2}^*，行线性无关；对应 C_1^* 中的 C_{i1}^*，C_2^* 中的 C_{j2}^* 列线性无关）；则由 Σ_1，Σ_2 并联而成的系统亦为最小实现.

证　略.

3　最小实现方法

1）按定理2，找出 $G_0(s)$，$G_l(s)$ 及 $G_n(s)$.

2）从 $G_l(s)$，$G_n(s)$ 中找出 D_{jn}，$G_{j0}(s)$，D_{il}，$G_{i0}(s)$ 以及 D'_{il}，D'_{jn}，若 $G_l(s)$，$G_n(s)$ 为特别情形，可以直接对其进行实现.

3）对 $G_0(s)$，$G_{j0}(s)$ 及 $G_{i0}(s)$ 进行直接实现.

4）由定理3及其推论，完成 $(A, B, D'_{il}C)$，(A, BD'_{jn}, C).

5）由定理4，得出最后的最小实现.

4　举　　例

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{s-2} & \dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s-3}\\ \dfrac{1}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{s-2} & 0\end{bmatrix}.$$

解　$G_0(s)=0$，

$$G_n(s)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\dfrac{1}{s-2}\\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad G_l(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{s-2} & \dfrac{1}{s-3}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s-3}\\ \dfrac{1}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{s-2} & 0\end{bmatrix},$$

$$G_{l0}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)^2} & & \\ & \dfrac{1}{s-2} & \\ & & \dfrac{1}{s-3}\end{bmatrix},\quad D_{il}(s)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad D_{il}=D'_{il},$$

$$G_{n0}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-2} & & \\ & \dfrac{1}{s} & \\ & & 0\end{bmatrix},\quad G_{jn}(s)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad D'_{jn}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

对 $G_{l0}(s)$ 的实现为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{ccc}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_{l10}\\ y_{l20}\\ y_{l30}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$

对 $G_l(s)$ 的实现为

$$D_{il}'C=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_{l1}\\y_{l2}\\y_{l3}\end{bmatrix}=D_{il}'C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

对 $G_n(s)$ 的实现为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_5\\\dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\\&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_{n1}\\y_{n2}\\y_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\end{bmatrix}.$$

最后的实现

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hdashline 0&0&2&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\\hdashline 0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\1&0&0\\\hdashline 0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 0&0&-1\\1&1&0\end{array}\right],\quad C=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}1&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0\end{array}\right].$$

5 结 论

本文所提出的最小实现方法,具有以下特点:

1) 计算工作量大为减少;

2) 具有一定的物理意义,构造过程直观;

3) 由于 A 阵为对角规范形(或约当规范形,或两者兼之),检验是否为最小实现,以及结果是否正确,一看即可得知[2].

参 考 文 献

[1] 王照林等. 现代控制理论基础. 北京:国防工业出版社,1983, 178—181

[2] 郑大钟等. 自动控制原理与系统(下册). 北京:国防工业出版社,1980, 118—119

A Very Simple Method for Constructing the Smallest Realization

ZHOU Hong

(Wuhan Institute of Hydraulic and Electric Engineering·Wuhan, 430072, PRC)

Abstract: The smallest realization is directly given by solving the transfer function matrix with the factors of prime to each other in the every column and row, and diagonal transfer function matrix.

Key words: the smallest realization; prime to each other; direct realization

本文作者简介

周 洪 1962年生. 1982年7月毕业于中南工业大学自动控制系,获学士学位. 同年9月入西南电管局长寿发电厂工作,1988年6月硕士研究生毕业于重庆大学自动化系,获硕士学位,同年7月入武汉水利电力学院任教,现为该校讲师. 主要研究领域为多变量控制理论;热工控制系统,电力系统自动化等.