第10卷第5期
1993年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 5
Oct., 1993

非线性系统结构的伪分解及反馈等价*

郑 毅
(上海交通大学自动控制系,200030)

张嗣瀛
(东北大学自动控制系·沈阳,110006)

摘要:本文主要讨论了非线性系统一种被称为伪分解的特殊结构分解问题,给出了伪分解的充分条件以及分解后得到的系统反馈线性化的充要条件.

关键词:非线性系统;结构伪分解;反馈等价

1 引 言

在过去的十几年中,国内外许多学者用微分几何方法对非线性系统进行了广泛的研究,其中研究仿射非线性系统的分解是比较典型的问题之一[1~3],本文主要是对分解问题作进一步的探讨,研究了一种被称为'伪分解'的特殊结构分解问题,这种分解与其它分解的不同在于它是把非线性系统分解成若干个子系统,这些子系统之间有点象级联解耦,分解后的第一个子系统的输入是原系统的输入 u,而其它子系统的输入则是上一个子系统的状态变量(称为伪输入).可以证明在进行伪分解后,两个反馈等价的非线性系统具有相同的基本结构,即两个反馈等价的系统经伪分解后可得到相同数目的子系统,且对应子系统的维数也相同.伪分解把非线性系统分解成非线性 Hessenberg 形,即分解后的系统具有块三角形式,而且对伪输入而言各个子系统又都是完全能控的.由整个系统的反馈等价性可导出伪分解后各子系统的反馈等价性,这对弄清反馈等价系统的基本结构有很大好处.本文在研究伪分解的同时也研究了经伪分解后得到系统的反馈线性化条件.可以说这是解耦线性化[4]的一种特殊情况.

2 准备定理

考虑下列仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i. \tag{2.1}$$

这里 $x\in R^n$,$f(x)$,$g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$是光滑向量场,$u_i(i=1,2,\cdots m)$是输入.假设 $x=0$ 是它的平衡点,即 $f(0)=0$.

在分解问题中,(f,g)-不变分布是一个非常重要和非常基本的概念.

定义 2.1[5] 给定微分流形 M 上的一个分布 Δ,以及一点 $x_0\in M$,如果在 x_0 的某个邻域 V 上,存在 $\alpha\in C^{\infty}_{m}(V)$,$\beta\in Gl(m,C^{\infty}(V))$,使得在 V 上

$$[f+g\alpha,\Delta]\subset\Delta, \tag{2.2a}$$

$$[(g\beta)_i,\Delta]\subset\Delta,\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{2.2b}$$

则称分布 Δ 在 x_0 点 (f,g)-不变的,这里 $[f+g\alpha,\Delta]=\{[f+g\alpha,Y]\mid Y\in\Delta\}$,$[(g\beta)_i,\Delta]=$

* 国家自然科学基金资助课题.
本文于1991年7月22日收到.1993年4月28日收到修改稿.

$\{[(g\beta)_i, Y] | Y \in \Delta\}$，$(g\beta)_i$ 是 $(g\beta)$ 的第 i 列向量.

考虑(2.2)这样的关系式是因为它对应着如下的反馈律：

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v.$$

对于非线性系统(2.1)，如果存在一个 k 维 (f,g)-不变的非奇异对合分布 Δ，则存在坐标变换 $Z=T(x)$，在新的坐标下系统(2.1)就分解成[5]

$$\dot{Z}_1 = f_1(Z_1, Z_2) + g_1(Z_1, Z_2)u, \tag{2.3a}$$

$$\dot{Z}_2 = f_2(Z_2) + g_2(Z_2)u. \tag{2.3b}$$

这里 $\dim(Z_1)=k$，$\dim(Z_2)=n-k$. 这是非线性系统结构分解基本的结果之一，很多分解结果(见[5]中的三，四章)都是以此为基础而导出的.

在给出伪分解条件之前我们先给出一个准备定理，它对于得到伪分解的条件是很重要的.

定理 2.1 对于非线性系统(2.1)，如果在 $x_0 \in M$ 的一个邻域 V 内存在一个 k 维非奇异对合分布 Δ 满足

1) $[[f, \Delta], \Delta] \subset \Delta$, (2.4a)

2) $[g_i, \Delta] \subset \Delta$, $1 \leqslant i \leqslant m$, (2.4b)

则在 V 内某个坐标系统(2.1)能够分解成

$$\dot{Z}_1 = f_1(Z_1, Z_2) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i^1(Z_1, Z_2), \tag{2.5a}$$

$$\dot{Z}_2 = f_2(Z_2) + A(Z_2)Z_1 + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i^2(Z_2). \tag{2.5b}$$

其中 $[[f, \Delta], \Delta]$ 和 $[g_i, \Delta]$ 的意义可参见定义 2.1. $Z_1 = [x_1, \cdots, x_k]^T$，$Z_2 = [x_{k+1}, \cdots, x_n]^T$.

证 因为 Δ 是一个非奇异的对合分布，由 Frobenius 定理知一定存在局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 使

$$\Delta = \mathrm{sp}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}\} \tag{2.6}$$

在局部坐标下对于 $1 \leqslant i, j \leqslant k$ 有

$$[[f, \frac{\partial}{\partial x_i}], \frac{\partial}{\partial x_j}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j \partial x_i} \end{bmatrix} \in \Delta. \tag{2.7}$$

由(2.4a)知

$$\frac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \cdots, k, \quad q = k+1, \cdots, n. \tag{2.8}$$

所以一定存在函数 $\Phi_{iq}(x_{k+1}, \cdots, x_n)$ 使得对于 $q=k+1, \cdots, n$，有

$$\begin{aligned} f_q = & \Phi_{1q}(x_{k+1}, \cdots, x_n)x_1 + \Phi_{2q}(x_{k+1}, \cdots, x_n)x_2 + \cdots \\ & + \Phi_{kq}(x_{k+1}, \cdots, x_n)x_k + C_{kq}(x_{k+1}, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{2.9}$$

记 $\overline{f_2}(Z) = [f_{k+1}(Z), \cdots, f_n(Z)]^T$， 则 $\overline{f_2}(Z) = f_2(Z_2) + A(Z_2)Z_1$. (2.10)

这里 $A(Z_2)$ 是函数矩阵，$f_2(Z_2)$ 是由函数列向量组成. 相似地由(2.4b)知

$$g_i^2(Z) = g_i^2(Z_2), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{2.11}$$

证毕.

下面给出伪分解的定义.

定义 2.2 如果存在状态变换,使系统(2.1)分解成下列的形式

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = f_1(Z_1, \cdots, Z_k) + g_1(Z_1, \cdots, Z_k)u, \\ \dot{Z}_2 = f_2(Z_2, \cdots, Z_k) + g_2(Z_2, \cdots, Z_k)Z_1, \\ \quad\vdots \\ \dot{Z}_{k-1} = f_{k-1}(Z_{k-1}, Z_k) + g_{k-1}(Z_{k-1}, Z_k)Z_{k-2}, \\ \dot{Z}_k = f_k(Z_k) + g_k(Z_k)Z_{k-1}. \end{cases} \tag{2.12}$$

则称(2.12)是(2.1)的一个伪分解.

系统(2.12)具有较强的实际工程背景,因为许多力学系统可以整理成这种形式,最典型的例子就是飞机的动力学模型就可以整理成这种形式,所以研究由什么样的系统能够转变成这种系统以及研究这种系统所具有的特殊性质在工程上具有实际的意义.

3 结构伪分解

本节研究什么样的系统能够转换成系统(2.12)的形式,以及系统(2.12)所具有的特殊性质. 先给出伪分解算法.

假设对非线性系统(2.1)存在一个 n_1 维非奇异的对合分布 Δ_1,满足

1) $[[f, \Delta_1], \Delta_1] \subset \Delta_1$, (3.1a)

2) $[g_i, \Delta_1] \subset \Delta_1$, $\quad i = 1, 2, \cdots, n_1$. (3.1b)

不妨设 $\Delta_1 = \mathrm{sp}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\}$.

由定理 2.1 知存在一个坐标变换 $Z = \Phi(x)$,满足

$$\Phi_* f(x) = \begin{bmatrix} f_1(Z_1, \overline{Z_2}) \\ \overline{f_2}(\overline{Z_2}) + C_2(\overline{Z_2})Z_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_* g(x) = \begin{bmatrix} g_1(Z_1, \overline{Z_2}) \\ \widetilde{g_2}(\overline{Z_2}) \end{bmatrix}.$$

其中 $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \overline{Z_2} \end{bmatrix}$, $Z_1 = [x_1, \cdots, x_{n_1}]^{\mathrm{T}}$, $\overline{Z_2} = [x_{n_1+1}, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$, Φ_* 表示变换 Φ 的导出映射. 由定理 2.1 知经这样的变换后系统(2.1)能够分解成

$$\dot{Z}_1 = f_1(Z_1, \overline{Z_2}) + g_1(Z_1, \overline{Z_2})v_1, \tag{3.2a}$$

$$\dot{\overline{Z_2}} = \overline{f_2}(\overline{Z_2}) + C_2(\overline{Z_2})Z_1 + \widetilde{g_2}(\overline{Z_2})v_1. \tag{3.2b}$$

这里 $v_1 = u$.

如果把 $v_2 = [Z_1, v_1]^{\mathrm{T}}$ 作为子系统(3.2b)的输入,则可得到下一个能控子系统

$$\dot{\overline{Z_2}} = \overline{f_2}(\overline{Z_2}) + \overline{g_2}(\overline{Z_2})v_2. \tag{3.3}$$

这里 $\overline{g_2}(\overline{Z_2}) = [C_2(\overline{Z_2}), \widetilde{g_2}(\overline{Z_2})]$, $v_2 = [z_1^{\mathrm{T}}, v_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 而 $v_1 = u$.

新的输入 v_2 可看作"伪输入",子系统(3.3)被称作"伪子系统". 因为在实际系统中 v_2 只是假想存在的,这主要是为了研究系统的结构而构造出来的,所以称这样的分解为"伪

分解".

如果对子系统(3.3)存在一个 n_2 维非奇异对合分布 Δ_2,满足

1) $[[\overline{f}_2,\Delta_2],\Delta_2]\subset\Delta_2$, (3.4a)

2) $[\overline{g}_{2i},\Delta_2]\subset\Delta_2$, $i=1,2,\cdots,n_2$. (3.4b)

同样设

$$\Delta_2=\mathrm{sp}\{\frac{\partial}{\partial x_{n_1+1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{n_1+n_2}}\}.$$

由定理 2.1 知子系统(3.3)能够进一步分解成

$$\dot{Z}_2=f_2(Z_2,\overline{Z_3})+g_2(Z_2,\overline{Z_3})v_2, \tag{3.5a}$$

$$\dot{\overline{Z_3}}=\overline{f_3}(\overline{Z_3})+C_3(\overline{Z_3})Z_2+\widetilde{g_3}(\overline{Z_3})v_2. \tag{3.5b}$$

如果我们把 $v_3=[Z_2^{\mathrm{T}},v_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 作为子系统(3.5b)的输入,则可得到又一个完全能控的子系统(3.5a)和又一个伪子系统

$$\dot{\overline{Z_3}}=\overline{f_3}(\overline{Z_3})+\overline{g_3}(\overline{Z_3})v_3. \tag{3.6}$$

这里 $\overline{g_3}(\overline{Z_3})=[C_3(\overline{Z_3}),\widetilde{g_3}(\overline{Z_3})]$,而 $v_3=[z_2^{\mathrm{T}},v_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

如果非线性系统(2.1)可进行 k 次上述分解,这样就得到形如(2.12)的伪系统. 其中

$$v_1=u,\quad v_2=[Z_1^{\mathrm{T}},v_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\cdots,v_k=[Z_{k-1}^{\mathrm{T}},v_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \tag{3.7}$$

定理 3.1 对非线性系统(2.1),若上述算法中存在 k 个非奇异对合分布 $\Delta_1,\cdots,\Delta_k$,满足

1) $[[f_j,\Delta_j],\Delta_j]\subset\Delta_j$, $j=1,2,\cdots,k$, (3.8a)

2) $[g_{jp},\Delta_j]\subset\Delta_j$, $p=1,2,\cdots,n_j$, $j=1,2,\cdots,k$. (3.8b)

则系统(2.1)能分解成三角系统形式.

应该注意的是如果定理 3.1 中的第二个条件(即(3.8b))变成满足

$$g_{jp}\in\Delta_j,\quad p=1,2,\cdots,n_j,\quad j=1,2,\cdots,k. \tag{3.9}$$

而其它条件不变,则非线性系统(2.1)也能分解成(2.12),但是"伪输入"(3.7)将变成

$$v_1=u(\text{真正的输入}),\quad v_2=Z_1,\quad v_3=Z_2,\cdots,\quad v_k=Z_{k-1}. \tag{3.10}$$

实际上具有(3.10)输入的分解称为"伪分解"更要恰当些,因为第一个子系统的输入是原系统的输入 u,而其它子系统的输入则是上一个子系统的状态变量 $v_i=Z_{i-1}$. $(i=1,2,\cdots,k)$,这样的分解在研究非线性系统的结构和反馈等价性等问题中有用.

容易看出如果两个反馈等价的非线性系统中的一个能够伪分解,则另一个也能分解成相同形式的伪系统,即分解后中的二个伪系统的对应各子系统的维数相同. 从而可得到二个非线性系统的反馈等价性与对应子系统之间的反馈等价性的关系.

由定义 2.1 及 Quaker 引理可得在反馈下伪分解的条件.

推理 3.1 在定理 3.1 中,若条件(3.8a)和(3.8b)变成满足

1) $[[\overline{f}_j,\Delta_j],\Delta_j]\subset\Delta_j+G_j$, $j=1,2,\cdots,k$, (3.11a)

2) $[\overline{g}_{ip},\Delta_j]\subset\Delta_j+G_j$, $p=1,2,\cdots,n_j$, $j=1,2,\cdots,k$, (3.11b)

而其它条件不变,这里 G_j 表示由向量场 $\{g_{i1},\cdots,g_{im}\}$ 张成的分布. 则能通过坐标变换和非奇异的反馈,把系统(2.1)分解成(2.12),它的证明同 Quaker 引理. 由此可得反馈伪分解

的条件.

证明略.

4 伪分解与反馈等价

伪系统还有一个更重要的特点那就是它容易线性化，本节给出系统(2.12)反馈线性化的充要条件.

定理 4.1 如果(3.8)式满足，那么系统(2.12)能反馈线性化的充要条件是

$$\operatorname{rank}(g_i(Z_1, \cdots, Z_k)) = \dim(Z_i), \quad (Z_0 = u,\ 1 \leqslant i \leqslant k). \tag{4.1}$$

对于系统(2.12)，若满足条件(4.1)则可以这样线性化：

算法 4.1 若系统(2.12)满足条件(4.1)，可构造坐标变换

$$Z = T(x) = [Z_1, \cdots, Z_k]^{\mathrm{T}}.$$

这里取 $Z_1 = Z_k$，由伪系统(2.12)可得

$$\begin{cases} Z_2 = \dot{Z}_1 = f_k(Z_k) + g_k(Z_k)Z_{k-1} = f_k(Z_k) + \tilde{g}_k(Z_k)Z_{k-1}, \\ Z_3 = \dot{Z}_2 = \tilde{f}_{k-1}(Z_{k-1}, Z_k) + \tilde{g}_{k-1}(Z_{k-1}, Z_k)Z_{k-2}, \\ \qquad \vdots \\ Z_{k-1} = \dot{Z}_{k-2} = \tilde{f}_3(Z_3, \cdots, Z_k) + \tilde{g}_3(Z_3, \cdots, Z_k)Z_2, \\ Z_k = \dot{Z}_{k-1} = \tilde{f}_2(Z_2, \cdots, Z_k) + \tilde{g}_2(Z_2, \cdots, Z_k)Z_1. \end{cases} \tag{4.2}$$

经这样的坐标变换后可使系统(2.12)变成

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2, \\ \dot{Z}_2 = Z_3, \\ \qquad \vdots \\ \dot{Z}_k = \tilde{f}_1(Z_1, \cdots, Z_k) + \tilde{g}_1(Z_1, \cdots, Z_k)u. \end{cases} \tag{4.3}$$

只要 $\tilde{g}_1$ 非奇异，系统(4.3)就能反馈线性化. 可以证明若(4.1)成立，则有

$$\tilde{g}_i(Z_1, \cdots, Z_k) \text{ 对于 } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ 是非奇异的}. \tag{4.4}$$

所以(4.3)能反馈线性化，且反馈为

$$u = \tilde{g}_1(Z_1, \cdots, Z_k)^{-1} f_1(Z_1, \cdots, Z_k) + \tilde{g}_1(Z_1, \cdots, Z_k)^{-1} v. \tag{4.5}$$

另外还可以证明(4.2)是一个同胚映射. 因为只要(4.4)成立，矩阵

$$J_T = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{g}_k(Z_k) & * \\ 0 & \cdots & \tilde{g}_{k-1}(Z_{k-1}, Z_k) & * & * \\ 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & * & * & * \\ \tilde{g}_2(Z_2, \cdots, Z_k) & \cdots & * & * & * \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

则是满秩的，所以(4.2)是一个同胚映射. 这里 * 表示不确定项. 定理 4.1 的证明可参考算法 4.1.

5 结　论

本文给出了仿射非线性系统伪分解的条件及伪分解步骤，得出了反馈等价的两个仿

射非线性系统一定有相同的伪分解的结论.同时也研究了具有三角结构的系统反馈线性化的充要条件.对于系统(2.12)可以进一步采用[6]的方法研究它的镇定问题,这对非线性系统设计也是很有意义的一项工作.

参 考 文 献

[1] Respondek, W.. On Decomposition of Nonlinear Control Systems. Systems & Control Letters, 1982, 1:301—308

[2] Fliess, M.. Cascade Decomposition of Nonlinear Systems. Foliations and Ideals of Transitive Lie Algebra, Systems & Control Letters, 1985, 5:4—12

[3] Isidori, A.. Nonlinear Control Systems:An Introduction. Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1985, 72:1—111

[4] Shijima, S. L. Linearization and Decomposition of Nonlinear Control Systems. Proceedings of the 4-th Japanese in Dynamical Systems, 1989, 53—60

[5] 程代展.非线性系统的几何理论.北京:科学出版社,1988,79—186

[6] Vidyasagar, M.. Decomposition Techniques for Large-Scale Systems with Nonadditive Interaction:Stability and Stabilization, IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, AC-25:773—779

The Virtual Decomposition and Feedback Equivalence for Nonlinear Systems

ZHENG Yi

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, PRC)

ZHANG Siying

(Department of Automatic Control, Northeast University · Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, we mainly study a kind of special structure decomposition called virtual decomposition for nonlinear systems. A sufficient condition for such a decomposition is obtained. We also give the sufficient and necessary conditions of linearization via feedback for the decomposed systems.

Key words: nonlinear systems; virtural decomposition; feedback equivalence

本文作者简介

郑 毅 1963年生.1991年在东北工学院获博士学位,从1992年至今在上海交通大学控制理论与应用博士后流动站从事研究工作.目前研究主要兴趣为非线性系统理论及其应用,移动机器人控制等.

张嗣瀛 见本刊1993年第2期第234页.