第10卷第5期
1993年10月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 10, No. 5
Oct., 1993

# 广义系统的变结构控制

胡跃明　周其节　刘永清
(华南理工大学自动化系·广州,510641)

**摘要**：本文研究了线性广义系统的变结构控制问题，通过引进滑动模动态补偿器，得到了系统的滑动方程及关于内外部干扰的不变性条件；并给出了综合方法；最后研究了实际滑动模的近似问题．

**关键词**：广义系统；变结构控制；补偿器；综合

## 1 引　言

鉴于近年来广义系统在电网络分析、石油化工、投入产出分析及受限机器人等领域的广泛应用，促使控制界学者们对其进行深入系统的研究，并已取得了一定的成果[1~4,7~10]．然而迄今为止，几乎所有的工作都是假定系统的结构与参数是已知的，仅有少量工作涉及了一类特殊外干扰影响下的控制问题．事实上，系统本身不可避免地要受到各种随机因素的干扰，此外在建模时也往往忽略了一些次要因素的影响，因而使用现有的控制方法，系统的鲁棒性能差．

众所周知，变结构控制方法具有对系统内外部干扰的自适应性、只需估计干扰的界限而无需测定其具体值等优点，且容易实现．但对于广义系统，目前还尚未见到国内外有这方面的研究报告，原因之一是广义系统的状态通常依赖于控制量的导数[1]．本文的目的是对广义变结构系统的若干问题进行探讨．为了消除脉冲模对系统滑动模运动的影响，首先引进了文[5]中提出的滑动模动态补偿器概念，然后给出了系统的滑动模方程及对内外部干扰的不变性条件，其次讨论了综合方法及实际滑动模的近似问题，从而有效地将变结构控制方法应用于广义系统的鲁棒性控制问题．

## 2 广义变结构系统的滑动模方程

考虑下列广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu + Df. \tag{2.1}$$

其中 $x\in \mathrm{R}^n$ 是状态向量；$u\in \mathrm{R}^m$ 是控制向量；$f\in \mathrm{R}^k$ 是内外部干扰向量；$E,A,B,D$ 是相应阶数的常数阵．(2.1)中的控制向量 $u$ 在某一超平面上是不连续的，因此我们称(2.1)是广义变结构系统．

本文将假定：

i) $\mathrm{rank}E=r<n$；$\det(sE-A)\neq 0$，$s$ 为任意有限复数．

ii) $(E,A,B)$是强能控的．

由于 $\mathrm{rank}E=r<n$，不失一般性，假定$(E,A,B,D)$具有下列形式：

本文于1991年11月28日收到．

$$(E,A,B,D)=\left(\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\end{pmatrix}\right), \tag{2.2}$$

否则总可以用初等变换化为上述标准形式[4]. 此时，将系统(2.1)改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u+D_1f, & (2.3)\\ 0=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u+D_2f. & (2.4)\end{cases}$$

其中 $x_1\in R^r$, $x_2\in R^{n-r}$, (2.3)表示系统的慢变部分，而(2.4)表示系统的快变部分.

选取切换超平面为

$$\begin{cases}S=H_1x_1+V=0, & (2.5)\\ \dot{V}=H_2V+H_3x_1+H_4x_2. & (2.6)\end{cases}$$

其中 $H_1,H_3$ 为 $m\times r$ 待定常数阵，$H_2$ 为 $m\times m$ 待定阵，$H_4$ 为 $m\times(n-r)$待定阵，称(2.6)为系统(2.3)，(2.4)的滑动模动态补偿器[5]. 则有

$$\dot{S}=H_1(A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u+D_1f)+H_2V+H_3x_1+H_4x_2. \tag{2.7}$$

假定 $H_1B_1$ 可逆，则由 $\dot{S}=0$ 可得等效控制 $u_{eq}$

$$u_{eq}=-(H_1B_1)^{-1}H_1(A_{11}x_1+A_{12}x_2+D_1f)-(H_1B_1)^{-1}(H_2V+H_3x_1+H_4x_2).$$

将上式代入(2.3)，(2.4)即得系统的滑动方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1=(I-B_1(H_1B_1)^{-1}H_1)(A_{11}x_1+A_{12}x_2+D_1f)-B_1(H_1B_1)^{-1}(H_2V+H_3x_1+H_4x_2),\\ 0=(A_{21}-B_2(H_1B_1)^{-1}H_1A_{11})x_1+(A_{22}-B_2(H_1B_1)^{-1}H_1A_{12})x_2\\ \quad +(D_2-B_2(H_1B_1)^{-1}H_1D_1)f-B_2(H_1B_1)^{-1}(H_2V+H_3x_1+H_4x_2).\end{cases}$$

假定干扰项矩阵 $D$ 满足下列条件

$$\mathrm{rank}(B,D)=\mathrm{rank}B. \tag{2.8}$$

则易知此时系统的滑动方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=(I-B_1(H_1B_1)^{-1}H_1)(A_{11}x_1+A_{12}x_2)-B_1(H_1B_1)^{-1}(H_2V+H_3x_1+H_4x_2),\\ 0=(A_{21}-B_2(H_1B_1)^{-1}H_1A_{11})x_1+(A_{22}-B_2(H_1B_1)^{-1}H_1A_{12})x_2,\\ \quad -B_2(H_1B_1)^{-1}(H_2V+H_3x_1+H_4x_2).\end{cases} \tag{2.9}$$

也即此时系统的滑动运动与干扰无关，容易证明条件(2.8)也是滑动模与干扰无关的必要条件，因此广义变结构系统的滑动运动不变性条件与正常的变结构系统相同[5,6].

## 3 综　合

广义变结构系统的综合可分为两步：第一，选择切换平面 $S=0$，使得系统的滑动运动具有良好的动态品质；第二，设计变结构控制规律 $u$，使得系统实现滑动模运动.

**定理 1** 设 $u=K_1x_1+K_2x_2$ 是使系统(2.3)，(2.4)无干扰时具有指定稳定度的反馈控制律. 则当干扰项满足不变性条件(2.8)时，为使滑动运动具有上述指定的稳定度，仅需取(2.5)，(2.6)中的参数阵为下述形式

$$H_2=0,\quad H_3=-H_1A_{11}-H_1B_1K_1,\quad H_4=-H_1A_{12}-H_1B_1K_2. \tag{3.1}$$

其中 $H_1$ 是使 $H_1B_1$ 可逆的任意常数阵.

证 将(3.1)代入(2.9)立即可得.

定理 1 给出了切换超平面 $S=0$ 的设计方法. 由于 $H_1$ 的选取具有一定的灵活性，因此可以适当地选择 $H_1$ 使得(3.1)中的矩阵 $H_3,H_4$ 具有比较简单的结构. 如果不加 $m$ 个积分器而仅取切换平面为 $S=H_1x_1=0$，采用文[5,6]中关于线性系统的降阶方法，则不难发

现此时要确定 $H_1$ 使得滑动运动具有给定的稳定度将是非常复杂和困难的，因此引进滑动模动态补偿器具有一定的优越性.

其次设计变结构控制律 $u$ 使得系统实现滑动模运动，我们有下面的

**定理 2** 如果取切换平面(2.5)，(2.6)中的参数阵为(3.1)，则在下列变结构控制律(3.2)下，系统(2.3)，(2.4)实现滑动模运动.

$$\begin{cases} u = K_1x_1 + K_2x_2 - (H_1B_1)^{-1}\bar{u}, \\ \bar{u} = G\,\mathrm{sign}(S). \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $G=\mathrm{diag}(g_i)_{m\times m}$，$g_i(i=1,\cdots,m)$满足：$g_i>\bar{f}_i$. 这里 $\bar{f}_i$ 表示 $H_1D_1f$ 的第 $i$ 行.

证 由(2.3)～(2.6)，(3.1)，(3.2)易知

$$\begin{aligned} \dot{S} &= H_1\dot{x}_1 + H_3x_1 + H_4x_2 = -H_1B_1(K_1x_1 + K_2x_2) + H_1B_1u + H_1D_1f \\ &= H_1D_1f - \bar{u} = H_1D_1f - G\,\mathrm{sign}(S). \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此由 $g_i>\bar{f}_i$ 知 $S^T\dot{S}<0$，也即系统(2.3)，(2.4)实现滑动模运动.

由(3.2)，(3.3)可知，变结构控制项 $\bar{u}$ 的作用是改善系统的鲁棒性能，只要干扰范围已知，就可确定增益阵 $G$.

## 4 实际滑动模的近似

以上是针对理想情形讨论的，即滑动运动准确地发生在切换平面 $S=0$ 上. 实际系统由于存在各种非理想因素，滑动运动不是在 $S=0$ 上实现，而是在 $S=0$ 的某一邻域内. 采用正则化方法[6]，用连续控制量 $\bar{u}$ 代替(2.3)，(2.4)中的不连续控制量 $u$，得实际滑动模方程

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1\bar{u} + D_1f, \\ 0 = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + B_2\bar{u} + D_2f, \end{cases} \tag{4.1}$$

则实际滑动模与理想滑动模之间有下列的近似结果.

**定理 3** 设切换平面(2.5)，(2.6)中的参数阵为(3.1)；并且(4.1)的任何解均在边界层 $|S|\leqslant\delta(\delta>0)$内；则必有

$$\lim_{\delta\to 0}|x_1(t)-\bar{x}_1(t)| = 0, \quad 关于\ t\in[0,\infty]\ 一致成立.$$

其中 $x(t)=(x_1^T(t),x_2^T(t))^T$ 是理想滑动方程(2.7)满足初始条件 $x_1(0)=x_{01}$，$x_2(0)=x_{02}$的解；$\bar{x}(t)=(\bar{x}_1^T(t),\bar{x}_2^T(t))^T$ 是实际滑动方程(4.1)满足初始条件 $\bar{x}_1(0)=\bar{x}_{01}$，$\bar{x}_2(0)=\bar{x}_{02}$的解；并且 $S(x(0))=0$，$|\bar{x}_1(0)-x_1(0)|\leqslant a\delta$，$(a>0)$.

证 在边界层 $|S|\leqslant\delta$ 内有

$$\dot{S} = -H_1B_1(K_1\bar{x}_1 + K_2\bar{x}_2) + H_1B_1\bar{u} + H_1D_1f, \tag{4.2}$$

因此得

$$\bar{u} = K_1\bar{x}_1 + K_2\bar{x}_2 + (H_1B_1)^{-1}\dot{S} + (H_1B_1)^{-1}H_1D_1f. \tag{4.3}$$

将(4.3)代入(4.1)即得实际滑动模方程

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1(K_1\bar{x}_1 + K_2\bar{x}_2) + B_1(H_1B_1)^{-1}\dot{S} + (I - B_1(H_1B_1)^{-1}H_1)D_1f, \\ 0 = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + B_2(K_1\bar{x}_1 + K_2\bar{x}_2) + B_2(H_1B_1)^{-1}\dot{S} + (D_2 - B_2(H_1B_1)^{-1}H_1D_1)f. \end{cases} \tag{4.4}$$

而理想滑动方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1(K_1x_1 + K_2x_2) + (I - B_1(H_1B_1)^{-1}H_1)D_1f, \\ 0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2(K_1x_1 + K_2x_2) + (D_2 - B_2(H_1B_1)^{-1}H_1D_1)f. \end{cases} \tag{4.5}$$

令 $e_1=\bar{x}_1-x_1, e_2=\bar{x}_2-x_2$，将(4.4)，(4.5)相减即得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2 + B_1(K_1e_1 + K_2e_2) + B_1(H_1B_1)^{-1}\dot{S}, & (4.6) \\ 0 = A_{21}e_1 + A_{22}e_2 + B_2(K_1e_1 + K_2e_2) + B_2(H_1B_1)^{-1}\dot{S}. & (4.7) \end{cases}$$

由定理1中 $K_1,K_2$ 的选取知，$A_{22}+B_2K_2$ 可逆，并且系统(2.3)，(2.4)无干扰时是渐近稳定的. 因此由(4.7)知

$$e_2 = -(A_{22} + B_2K_2)^{-1}[(A_{21} + B_2K_1)e_1 + B_2(H_1B_1)^{-1}\dot{S}]. \tag{4.8}$$

将(4.8)代入(4.6)即得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= [A_{11} + B_1K_1 - (A_{12} + B_1K_2)(A_{22} + B_2K_2)^{-1}(A_{21} + B_2K_1)]e_1 \\ &\quad + [B_1 - (A_{12} + B_1K_2)(A_{22} + B_2K_2)^{-1}B_2](H_1B_1)^{-1}\dot{S} \\ &\triangleq U_1e_1 + U_2\dot{S}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

令 $T(t)=e^{U_1t}$，则存在正数 $p$ 使得

$$|T(t)| \leqslant e^{-pt}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.10}$$

显然，(4.9)的解可表示为

$$\begin{aligned} e_1 &= e^{U_1t}(\bar{x}_{01} - x_{01}) + \int_0^t e^{U_1(t-\theta)}U_2\dot{S}\mathrm{d}\theta \\ &= e^{U_1t}(\bar{x}_{01} - x_{01}) + e^{U_1(t-\theta)}U_2S\big|_0^t + \int_0^t e^{U_1(t-\theta)}U_1U_2S\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

因此由所给条件及(4.10)知

$$\begin{aligned} |e_1| &\leqslant a\delta e^{-pt} + 2|U_2|\delta + \int_0^t e^{-p(t-\theta)}|U_1U_2|\delta\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant (2|U_2| + a + p^{-1}|U_1U_2|)\delta, \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

故定理3结论成立.

定理3只给出了慢变子系统实际滑动模的近似结果，下面的结论表明在适当条件下，快变子系统实际滑动模也是一致收敛于理想滑动模的.

**定理4** 在定理3条件下，如果

i) $P_1 \triangleq H_1(A_{12}+B_1K_2)(A_{22}+B_2K_2)^{-1}B_2$ 可逆；

ii) $P_2 \triangleq I-(A_{22}+B_2K_2)^{-1}B_2P_1^{-1}H_1(A_{12}+B_1K_2)$ 可逆；

则必有

$$\lim_{\delta\to0}|x_2(t) - \bar{x}_2(t)| = 0, \quad \text{关于 } t \in [0,\infty) \text{ 一致成立}.$$

证 由(2.5)，(2.6)，(3.1)及(4.9)易知

$$\dot{S} = -H_1B_1P_1^{-1}[H_1(A_{12} + B_1K_2)(A_{22} + B_2K_2)^{-1}(A_{21} + B_2K_1)e_1 + H_1(A_{12} + B_1K_2)e_2].$$

将上式代入(4.8)即知

$$e_2 = P_2^{-1}(A_{22} + B_2K_2)^{-1}[B_2P_1^{-1}H_1(A_{12} + B_1K_2)(A_{22} + B_2K_2)^{-1} - I](A_{21} + B_2K_1)e_1.$$

因此由定理3结论即知定理4结论成立.

## 5 结束语

本文利用变结构控制方法研究了广义系统的鲁棒性控制问题，得到了一些重要结果. 由于广义系统的快慢子系统通过输入相互耦合，因而其变结构控制综合问题比正常的变

结构系统要复杂得多，如何简化综合方法以及减弱系统存在滑动模的条件，还有待于进一步研究. 此外，象受限机器人这样的广义系统是非线性的，文[10]表明利用变结构控制方法具有一定的优越性，因此研究广义非线性系统的变结构控制方法也是很有意义的，作者将另文讨论[11].

## 参 考 文 献


[1] 王朝珠，戴立意. 广义动态系统. 控制理论与应用，1986，3(1)：2—12

[2] 王朝珠，戴立意. 广义系统的干扰解耦状态观测器. 控制理论与应用，1987，4(3)：23—30

[3] 王源. 广义线性系统的全状态输出调节. 控制理论与应用，1986，3(3)：69—76

[4] 王跃云等. 一种广义系统补偿器的设计方法. 控制理论与应用，1989，6(增刊 I)：111—115

[5] 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京：中国科学技术出版社，1990

[6] 周其节. 变结构系统. 广州：华南理工大学出版社，1989

[7] Verghese, G. C., Levy, B. C. and Kailath, T.. A Generalized State-Space for Singular Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(4):811—831

[8] Campbell, S. L.. Singular Systems of Differential Equations Ⅱ. Pittman, 1982

[9] Cobb, J. D.. Controllability, Observability and Duality in Singular Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29(12):1076—1082

[10] 苏春翌. 机器人变结构控制. 华南理工大学博士学位论文，1990

[11] Hu, Y. M.. Variable Structure Control of Nonlinear Singluar Systems. Preprints of 12-th IFAC World Congress Sydney, Australia, 1993, 8:417—420


# Variable Structure Control of Generalized Systems


HU Yueming, ZHOU Qijie and LIU Yongqing

(Department of Automation, South China University of Technology • Guangzhou, 510641, PRC)



**Abstract**: The variable structure control problem of generalized systems is studied in this paper. The sliding equation and invariance condition to system uncertainties are obtained by introducing sliding mode compensator. Synthesizing method is also given. Finally, approximation of practical sliding mode is studied in order to show that the variable structure control approach is available for practical control systems.



**Key words**: generalized systems; variable structure control; compensators; synthesis


## 本文作者简介


**胡跃明**　见本刊 1993 年第 3 期第 262 页.

**周其节**　见本刊 1993 年第 3 期第 262 页.

**刘永清**　见本刊 1993 年第 2 期第 134 页.