工业过程稳态优化控制算法的鲁棒性分析*

许立俭　万百五　韩崇昭
(西安交通大学系统工程研究所,710049)

摘要：本文旨在讨论稳态优化算法最优性的鲁棒性问题. 为此,对稳态优化控制算法进行了统一数学描述,利用集合间的 Hausdorff 半距离和 Dini 导数,引入了标志算法抗干扰性能强弱的灵敏度指标. 在此基础上研究了线性模型且具有二次性能指标控制问题 ISOPE(系统优化与参数估计相结合)算法的鲁棒性.

关键词：稳态控制；优化算法；灵敏度指标；鲁棒性

1 引　言

工业过程稳态优化控制研究至今,已取得了许多瞩目的成果;然而,就作者所知,讨论稳态优化控制算法鲁棒性方面的文献还不多见. 本文想在这方面作一点尝试.

众所周知,把一个实际工业过程化归为数学模型时,往往要忽略一些次要因素,只考虑某些主要因素,因而得到一个近似模型,即存在建模误差;其次,工业系统不可避免地存在着噪声. 本文称建模误差和噪声为系统的扰动. 由于存在扰动,当建立了上述问题一个优化算法,在理想条件下,已证明和测试它的收敛性和最优性之后,必需考虑有扰动时,该算法抗干扰能力怎样——即优化算法的鲁棒性问题. 具体地,在模型不变和无噪声时,算法可使系统达到最优或渐近最优,如果模型有一摄动量或系统有一未知不可测噪声时,算法是否仍然使得系统最优或渐近最优. 这在理论和实践上都是很重要的问题;若微小的扰动引起优化解的巨大变化,那么此算法实用价值就不大. 这些问题成为鲁棒性分析的背景.

2 稳态优化控制及鲁棒性问题描述

工业过程稳态优化控制过程[1,2]可表示成图1.

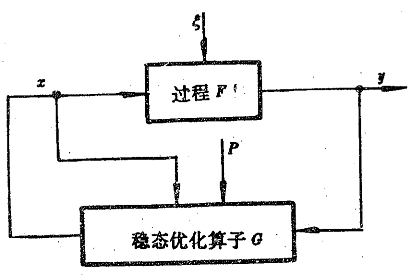

图1　稳态优化控制框图

其中 $x\in C\subset X$, $y\in Y$, X 和 Y 是线性赋范空间, x 和 y 分别是控制设定点和稳态输出, P 是过程的性能函数, C 为约束集, $F: C\to Y$ 是过程算子, $G: C\times Y\to 2^C$ 为优化算子(2^C 为 C 的所有子集构成的集合),记集值映射

$$T = G(x, F(x)): C \to 2^C. \qquad (1)$$

任取 $x\in C$, 由 $x=x_0$, $x_{n+1}\in T(x_n)$ 所确定的

* 高等学校博士点基金资助项目.
本文于1992年1月25日收到. 1992年9月14日收到修改稿.

任何一个序列$\{x_n\}$称为由x出发的轨道，所有从x出发的轨道集记为$O(x)$，轨道$\{x_n\}\in O(x)$的所有收敛子列的极限点集记为$\{\bar{x}_n\}$. 再记

$$\bar{O}(x)=\bigcup\{\{\overline{x_n}\}:x_n\in O(x)\}. \tag{2}$$

所谓由优化算子G所确定的稳态优化算法，是一个映射$S:C\to 2^C$，且对任何$x\in C$，有$S(x)=\bar{O}(x)$；称$\bar{O}(x)$为算法S对应初始点x的优化解集.

由于多项式函数在全体连续函数空间中的稠密性，可以认为F是多项式函数，且建模误差是由其系数即结构参数扰动所致；而噪声的幅值水平是由噪声向量的某些数字特征来度量，因此，只需讨论优化解集对参数变化的鲁棒性问题. 用λ表示过程的结构参数或噪声的某些数字特征；显然，当λ变动时，优化解集$S(x)$一般也跟着变动，从而是λ的集值函数，记为$S(x,\lambda)$.

上面提出的算法S的鲁棒性问题，可归为研究函数

$$U(x,\lambda)=H((x,\lambda),S(x,\lambda_0)) \tag{3}$$

的性质，其中$H(A,B)$为两集合A、B间的 Pompei-Hausdorff 半距离，详细见文献[3]；λ_0对应系统无扰动时的参数，$\lambda-\lambda_0$为参数的摄动量. 特别，当$S(x,\lambda)$为单点集时，$H(\cdot,\cdot)$为欧氏距离.

3 鲁棒性能及灵敏度指标

定义 1 设x是线性赋范空间，$C\subset X$，$E\subset R_n$(为参数空间)，$x\in C$，若任$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\|\lambda-\lambda_0\|<\delta$时，有$U(x,\lambda)=H(S(x,\lambda),S(x,\lambda_0))<\varepsilon$. 则称算法$S$是可用的(或不灵敏的[4]).

定义 2 相应于参数λ，称算法S_2比S_1(鲁棒性能)好，指：

1) 任给$x\in C$，$S_2(x,\lambda_0)=S_1(x,\lambda_0)$；

2) S_1和S_2都是可用的，且对$\varepsilon>0$，存在$\delta_2(\varepsilon)>\delta_1(\varepsilon)>0$，使得当$\|\lambda-\lambda_0\|<\delta_2$时，有$H(S_2(x,\lambda),S_2(x,\lambda_0))<\varepsilon$，当$\|\lambda-\lambda_0\|<\delta_1$时，有$H(S_1(x,\lambda),S_1(x,\lambda_0))<\varepsilon$. 这时可以定义一个标志算法抗干扰能力好坏的灵敏度指标：

$$\rho_S=\sup\{\varepsilon|\delta(\varepsilon),\quad 0<\varepsilon<a\}. \tag{4}$$

其中a为选定的小正常数.

显然，ρ_S越小算法性能越好，反之，则较差. 然而，对一个具体算法，ρ_S的计算是相当困难的，有时甚至是不可能的. 为简单计，可以用

$$D_S=\max\{\|D_S^+\|,\|D_S^-\|\}, \tag{5}$$

$$D_S^+=\{\limsup_{\lambda_i\to\lambda_{i0}^+}U(x,0,\cdots,\lambda_i,0,\cdots,0)/(\lambda_i-\lambda_{i0});\ i=1,\cdots,n\}, \tag{6}$$

$$D_S^-=\{\limsup_{\lambda_i\to\lambda_{i0}^-}U(x,0,\cdots,\lambda_i,0,\cdots,0)/(\lambda_i-\lambda_{i0});\ i=1,\cdots,n\}. \tag{7}$$

定义 2′ 相应于参数λ，称算法S_2比S_1(鲁棒性能)好，指

1) 任给$x\in C$，$S_2(x,\lambda_0)=S_1(x,\lambda_0)$；

2) S_1和S_2都是可用的，且$\rho_S\geqslant D_S$.

在一定条件下，ρ_S同D_S是正比关系，举例予以说明；并举例说明D_S的计算.

例 1 设对于某算法S，当$\lambda\leqslant 0$时，$U(x,\lambda)=-k\lambda$；$\lambda>0$时，$U(x,\lambda)=\lambda^2$，k为常数. 则

任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\min(\varepsilon/k,\sqrt{\varepsilon})$,当 $\|\lambda-\lambda_0\|<\delta$ 时,有 $U(x,\lambda)<\varepsilon$,易得

$$\rho_S=\max(k,\sqrt{a}). \tag{8}$$

由于 $U(x,\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点左右可导,易得 $D_S=k$.

例 2　求下列优化问题灵敏度指标 D_S,其中 λ 为参数,$\lambda_0=0$,

$$\min(-x_2). \tag{9}$$

其中

$$(x_1,x_2)\in\{(x_1,x_2):x_1^2-m^2\leqslant 0,\theta(x_1)-x_2=0,(x_1)^6-\lambda)x_2=0\};$$

$$\theta(x)=x^4\cos(2\pi/x),\text{ 当 } x\neq 0,x=0\text{ 时},\theta(x)=0;m\text{ 为正常数}.$$

当 $\lambda\leqslant 0$ 时,最优设定点 $S(\lambda)=0$,当 $\lambda>0$ 时,最优设定点 $S(\lambda)=\max(0,\theta(\sqrt[6]{\lambda}))$,取一趋于零序列 $\lambda_n=1/n$.

这时

$$D_S^+\geqslant\lim\theta(\sqrt{\lambda_n})/\lambda_n=\lim\theta(1/n)/(1/n)^6=\lim n^2=\infty.$$

同理 $D_S^-=-\infty$,所以 $D_S=\infty$。

特别,当优化解集是单点集 $S(x,\lambda)$ 时,为简便,可以用 $S(x,\lambda)$ 在 λ_0 点的梯度向量作为算法 S 的灵敏度指标,以简化计算.

由前面讨论可知,优化算法 S 是某算子 T 迭代而成,记为 $S=T^\infty$,若 T 是单值压缩的,则有下列结论.

定理 1　设 X 是 Banach 空间,$T:E\times X\to X,S=T^\infty$,满足

1) 任给 $x,y\in X$,及 $\lambda\in E$,存在 $\tau<1$,使 $\|T(x,\lambda)-T(y,\lambda)\|<\tau\|x-y\|$ 成立;

2) 任给 $x\in X,T(x,\lambda)$关于 λ 在 E 上连续.

则算法 S 的优化解集是单点集,且关于参数 λ 是可用的.

证　记 $T_\lambda=T(\cdot,\lambda)$,以 Banach 压缩映射原理,对固定的 λ 及任 $x\in X$,迭代序列$\{x_n\}=\{(T_\lambda)^n\}x$ 收敛于 T_λ 的唯一不动点 $S(x,\lambda)$,设 $\lambda_n\to\lambda_0,(n\to\infty)$,那么

$$\begin{aligned}
&\|S(x,\lambda_n)-S(x,\lambda_0)\|\\
=&\|T(S(x,\lambda_n),\lambda_n)-T(S(x,\lambda_0),\lambda_0)\|\\
\leqslant&\|T(S(x,\lambda_n),\lambda_n)-T(S(x,\lambda_0),\lambda_n)\|+\|T(S(x,\lambda_0),\lambda_n)-T(S(x,\lambda_0),\lambda_0)\|\\
\leqslant&\tau\|S(x,\lambda_n)-S(x,\lambda_0)\|+\|T(S(x,\lambda_0),\lambda_n)-T(S(x,\lambda_0),\lambda_0)\|\\
&\cdot\|S(x,\lambda_n)-S(x,\lambda_0)\|\\
\leqslant&1/(1-\tau)\|T(S(x,\lambda_0),\lambda_n)-T(S(x,\lambda_0),\lambda_0)\|
\end{aligned}$$

由题设,当 $\lambda_n\to\lambda_0$ 时,有 $S(x,\lambda_n)\to S(x,\lambda_0)$. 由 λ_n 的任意性,$S(x,\lambda)\to S(x,\lambda_0)$,(当 $\lambda\to\lambda_0$ 时).　　证毕.

4　线性模型且具有二次性能函数 ISOPE 算法的鲁棒性能

现用前面所定义的鲁棒性及灵敏度指标来讨论线性模型且具有二次性能函数 ISOPE 算法[1,2]对模型结构参数的鲁棒性问题

$$\min Q=[y-y_0]'R[y-y_0]+x'Dx, \tag{10}$$

$$y=A_0x. \tag{11}$$

其中 x,y 分别是 m 维控制向量,r 维稳态输出向量;R,D,A_0 分别是 $r\times r$ 正定矩阵,$r\times r$ 正

定矩阵，$r\times m$ 矩阵.

由于建模误差和测量误差，而得近似模型

$$y = Ax + \alpha, \quad (\alpha\text{ 为可调向量}), \tag{12}$$

实际系统的最优设定点：

$$x_1 = [D + A_0'RA_0]^{-1}A_0Ry_0, \tag{13}$$

用两步法的最优设定点：

$$x_2 = [D + A'RA_0]^{-1}A'Ry_0, \tag{14}$$

修正两步法的计算结果：

$$x_3 = [D + A_0'RA_0]^{-1}A_0Ry_0. \tag{15}$$

这里，结构参数 λ 是以矩阵 A 各元素为分量的 $r\times m$ 维向量，$\lambda_0=A_0$；

显然，修正两步法，由于 $H(x_3,x_1)=0$，从而算法是可用的，且灵敏度指标为零. 对标准两步法：由(15)，(16)得

$$H(x_2,x_1) = [D + A'RA_0] \times \Delta\lambda \times \bar{x}. \tag{16}$$

其中

$$\Delta\lambda = [A - A_0]', \quad \bar{x} = R[y_0 - A_0x],$$

显然 $\Delta\lambda\to 0$ 时，$H(x_2,x_1)\to 0$；

所以，对这种系统，标准两步法还是可用的，其灵敏度指标

$$\partial H/\partial\lambda_{ij} = [D + A'RA_0]A_{ij}\bar{x}. \tag{17}$$

这里 A_{ij}表示(i,j)位置元素为 1，其余元素为 0 的 $r\times m$ 矩阵. 综上可得下列定理：

定理 2 对线性系统，且性能函数为二次型时，标准两步法和修正两步法对建模误差都是可用的，且修正两步法比标准两步法鲁棒性能好.

证 略.

5 结 论

本文引入了关于控制集合的鲁棒性和灵敏度指标概念，在此基础上讨论了稳态优化控制算法关于参数的鲁棒性问题，结果表明，若算法是压缩的，则算法关于参数变化是可用的；更进一步，对线性系统，且性能函数为二次型时，标准两步法和修正两步法对建模误差都是可用的，且修正两步法比标准两步法鲁棒性能好.

参 考 文 献

[1] Roberts, P. D. and Williams, T. W. C.. On an Algorithm for Combined System Optimisation and Parameter Estimation. Automatica, 1981, 17(1):199—209

[2] Brdys, M. and Roberts, P. D.. Convergence and Optimality of Modified Two-Step Algorithm for ISOPE. Int. J. System, Sci, 1987, 18(7):1305—1322

[3] Aubin, J. P.. Applied Abstract Analysis. Wiley Interscience Publicalion, 1977

[4] Doleza, V. I.. Sensitivity and Robust Stability of General Input-Output Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36(5):539—550

Robustness of Steady-State Optimisation Control
——A Study on Robustness of ISOPE Algorithm

XU Lijian, WAN Baiwu and HAN Chongzhao
(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, PRC)

Abstract: In order to discuss the robustness of the steady-state optimisation control, this paper has given a robust sensitivity index of optimisation algorithm through the Hausdorff hemidistance and Dini derivative. Then, studied the robustness of ISOPE method (Integrated System Optimisation and Parameter Estimation Method). Results show that for the linear model with quadratic performance index, ISOPE method is less sensitive.

Key words: steady-state control; optimum algorithm; robustness; sensitivity index

本文作者简介

许立俭　1961年生.分别于1983年和1990年毕业于西北大学数学系获理学学士和硕士学位,现为西安交通大学系统工程研究所博士研究生.学习和研究方向为:微分方程理论及大系统理论与应用.

万百五　见本刊1993年第5期第515页.

韩崇昭　1943年生.教授.1968年毕业于西安交通大学,1981年于中国科学院研究生院获硕士学位,现为西安交通大学信息控制系副主任、陕西省自动化学会秘书长.著有"泛函分析及其在自动控制中应用"等四部专著和教材.主要研究方向是:工业大系统优化,自适应控制,非线性频谱分析等.