第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

奇异摄动系统主导极点配置的一种方法

周其节　蔡刚强
(华南理工大学自动化系·广州,510641)

摘要: 本文将奇异摄动系统看成是存在参数扰动的广义系统的一种特殊形式,然后利用广义系统特征结构配置来使广义系统的有限闭环极点尽可能接近奇异摄动系统的闭环主导极点,从而达到近似配置奇异摄动系统主导极点的目的.本文提供的算法是数值稳定的.

关键词: 奇异摄动系统; 广义系统; 极点配置

1　引　　言

Moore[1]关于在多变量线性定常系统中利用状态反馈实现闭环系统特征结构配置的结果发表之后,闭环系统的特征结构配置问题受到了广泛注意[2~5],Kautsky 等人[6]利用特征结构配置方法实现了鲁棒极点配置,使多变量线性定常系统的闭环极点对于系统参数的变化不敏感.

近年来,有不少文章如[7～10]研究了广义系统的极点配置问题,特别是 Ozcaldiran 等人[11,12]和 Fletcher 等人[13,14]讨论了广义系统的特征结构配置问题.前者用几何方法讨论了广义系统的特征结构配置问题,给出了有限闭环极点/特征向量的最大数目等结果;后者则给出了在使广义闭环系统正则的情况下,得到最多个有限闭环极点的充要条件,并给出了有限闭环极点对系统参数变化灵敏度的一个度量及一个鲁棒极点配置算法.

2　广义系统特征结构配置的一些结论

考虑广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu. \tag{1}$$

这里 $x \in \mathrm{R}^n, u \in \mathrm{R}^m$ 均为时间 t 的函数,E, A, B 分别为相应的实矩阵,E 奇异,B 列满秩.

我们所关心的问题是:给出一组自共轭复数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q\}$ 在什么条件下存在并且怎样找到一个 $m \times n$ 实矩阵 F 和一个 $n \times q$ 矩阵 X_q,使得

$$(A + BF)X_q = EX_q\Lambda_q, \tag{2}$$

并且闭环系统是正则的,即

$$\det(A + BF - \lambda E) \neq 0. \tag{3}$$

这里 Λ_q 为对角阵,对角线上的元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$;$x_q$ 的列为 $A + BF - \lambda E$ 的(广义)特征向量,为简单起见,假设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ 互不相等.

显然

$$q \leqslant \mathrm{rank}E. \tag{4}$$

如果对 B 进行 QR 分解:

本文于1992年5月13日收到. 1993年2月25日收到修改稿.

$$B = [U_0,\ U_1]\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里 $[U_0,U_1]$为正交阵,z 非奇异,那么,对于(2)式中的 X_q,有如下定理[13]:

定理 1 给定 X_q,存在 F 满足(2)式的充要条件是:X_q 的第 i 列($i=1,2,\cdots,q$)属于 $U_1^{\mathrm{T}}(\lambda_i E-A)$的右零空间,即

$$U_1^{\mathrm{T}}(EX_q\Lambda_q - AX_q) = 0.$$

我们用 $S(\lambda_i)$($i=1,2,\cdots,q$)来表示这些零空间.

对于(3)式,有如下定理[13].

定理 2 如果 $E+(A+BF)S_\infty S_\infty^{\mathrm{T}}$非奇异,那么

$$\det(A + BF - \lambda E) \not\equiv 0.$$

这里 S_∞为 $n\times(n-\mathrm{rank}E)$矩阵,其列为 $\ker E$ 的正交基.

如果令

$$FS_\infty = W, \tag{5}$$

则

$$E + (A + BF)S_\infty S_\infty^{\mathrm{T}} = E + AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}} + BWS_\infty^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

如果对闭环系统除了要求(2),(3)式满足外,还要求

$$q = \mathrm{rank}E. \tag{7}$$

那么,为求出满足这些条件的 F,只需找出 $X_q=(x_1,x_2,\cdots,x_q)$,$x_i\in S(\lambda_i)$($i=1,2,\cdots,q$),使

$$\mathrm{rank}[X_q,\ S_\infty] = n, \tag{8}$$

并且存在 W,使

$$\mathrm{rank}[E + AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}} + BWS_\infty^{\mathrm{T}}] = n. \tag{9}$$

如果(8),(9)两式满足,就可求出

$$F = [z^{-1}U_0^{\mathrm{T}}(EX_q\Lambda_q - AX_q),W][X_q,\ S_\infty]^{-1}, \tag{10}$$

而对于(8),(9)两式,有如下定理[13]:

定理 3 给定一组自共轭的复数$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_q\}$,$q=\mathrm{rank}E$,存在向量组

$$x_i \in S(\lambda_i),\quad i = 1,2,\cdots,q$$

和矩阵 W,使得(8),(9)两式成立的充要条件是:

$$\mathrm{rank}[B,A - \lambda E] = n,\quad \forall\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

$$\mathrm{rank}[B,\ E + AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}}] = n. \tag{12}$$

如果广义系统(1)的参数满足(11),(12),那么为使(8),(9)成立而对 X_q,W 的选择是有一定的自由度的,为了利用这些自由度来减小广义闭环系统有限闭环极点对系统参数的扰动的灵敏度,[14]指出,如果$[X_q,\ S_\infty]$,$E+AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}}+BWS_\infty^{\mathrm{T}}$各自的谱条件数尽可能小(这里矩阵的谱条件数定义为 $\mathrm{cond}(\cdot)=\|(\cdot)\|_2\|(\cdot)^{-1}\|_2$),则可使这种灵敏度最小.

3 奇异摄动系统主导极点的配置

考虑强能控奇异摄动系统

$$\begin{bmatrix} I_{n-l} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u. \tag{13}$$

这里 ε 为一小正数，$x\in R^{n-l}, z\in R^{l}, u\in R^{m}$ 均为时间 t 的函数，$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ 分别为相应的实矩阵，且 A_{22}非奇异.

我们用广义系统模型

$$\begin{bmatrix} I_{n-l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \tag{14}$$

来近似代替(13). (14)的有限极点与(13)的主导极点之间的误差由 $\varepsilon\neq 0$ 造成，对给定的 ε，对(14)采用鲁棒极点配置方法来确定反馈矩阵，那么在同样的反馈结构下，(13)的主导极点将与(14)的有限极点最接近.

显然(14)的参数是满足(11)，(12)两式的，事实上

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_{n-l} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_l \end{bmatrix}[B, A-\lambda E] \\ &= \begin{bmatrix} I_{n-l} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}-\lambda I_{n-l} & A_{12} \\ B_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 & A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - \lambda I_{n-l} & 0 \\ B_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

因为(13)强能控，所以$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2)$能控，即

$$\operatorname{rank}[B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - \lambda I_{n-l}] = n-l, \quad \forall \lambda \in C.$$

而 A_{22}又是非奇异的，所以有

$$\operatorname{rank}[B, A-\lambda E] = n, \ \forall \lambda \in C.$$

另外，显然有 $S_\infty=\begin{bmatrix} 0 \\ I_l \end{bmatrix}$，所以

$$\operatorname{rank}[B,\ E + AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}}] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_1 & I_{n-l} & A_{12} \\ B_2 & 0 & A_{22} \end{bmatrix} = n.$$

我们以下的任务是找出状态反馈阵 F，使广义系统(14)的$(n-l)$个有限闭环极点在复平面的任意指定位置上(这 $n-l$ 个闭环极点不包含重极点)，并且使 $E+AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}}+BWS_\infty^{\mathrm{T}}$，$(X_q, S_\infty)$的谱条件数尽可能小，以使(14)的$(n-l)$个有限闭环极点对于系统参数的扰动尽可能不敏感，从而使(14)的$(n-l)$个有限闭环极点尽可能准确地等于(13)引入同样的状态反馈后的$(n-l)$个主导闭环极点.

4　具体算法

我们利用[6]中的算法来选定 W 和 X_q，使 $E+AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}}+BWS_\infty^{\mathrm{T}}$及$[X_q, S_\infty]$的谱条件数尽可能小，这里 $S_\infty=\begin{bmatrix} 0 \\ I_l \end{bmatrix}$.

1) W 的选定

$$E + AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}} + BWS_\infty^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I_{n-l} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + BWS_\infty^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

令

$$V \triangleq [V_1,\ V_2] \triangleq WS_\infty^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

这里 V_1, V_2 分别为 $m\times(n-l)$，$m\times l$ 的矩阵，$V_1=0$. 于是，(16)式变为

$$E + AS_\infty S_\infty^{\mathrm{T}} + BWS_\infty^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I_{n-l} & A_{12}+B_1V_2 \\ 0 & A_{22}+B_2V_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

令
$$V_2 \triangleq [p_1,\ p_2,\cdots,p_l],$$
$$k_1 \triangleq \left\| \begin{matrix} I_{n-l} & A_{12}+B_1V_2 \\ 0 & A_{22}+B_2V_2 \end{matrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} I_{n-l} & A_{12}+B_1V_2 \\ 0 & A_{22}+B_2V_2 \end{bmatrix}^{-1} \right\|_2.$$

为使(18)式右端矩阵的谱条件数 k_1 尽可能小,我们用以下算法确定 V_2,以下用到的范数均指 2-范数.

a) 令 $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} \triangleq [a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(l)}]$,给定某一正数 γ,选择 V_2 使(18)式左端矩阵可逆,计算 k_1,令 $\bar{k}_1=k_1$.

b) 令 $i=1$.

c) 对以下矩阵进行 QR 分解

$$\begin{bmatrix} I_{n-l} & \vdots & a^{(1)},\cdots,a^{(i-1)},a^{(i+1)},\cdots,a^{(l)} \\ 0 & & \end{bmatrix} = [Q_i,\ \bar{a}^{(i)}] \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

令
$$\tilde{a}^{(i)} = \bar{a}^{(i)} - a^{(i)},$$
再利用 $\| \tilde{a}^{(i)} - Bp_i \| =$ 极小,求出 p_i,然后,$a^{(i)}+Bp^{(i)} \to a^{(i)}$.

d) $i+1 \to i$,如 $i>l$,则 e),否则转 c).

e) 计算 k_1,$\Delta k_1=\bar{k}_1-k_1$,如 $\Delta k_1<\gamma$,则停,否则 $k_1 \to \bar{k}_1$,转 b).

2) X_q 的选定

对 X_q 的选定应使$[X_q,S_\infty]$的谱条件数尽可能小,即使 $k_2= \| X_q,S_\infty \| \ \| [X_q,S_\infty]^{-1} \|$ 尽可能小,这里,$X_q=[x_1,x_2,\cdots,x_{n-l}]$,$x_i \in S(\lambda_i)$,$i=1,2,\cdots,n-l$.

为此,我们采用如下算法:

a) 对 B 进行 QR 分解:

$$B = [U_0,\ U_1] \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) 对$(U_1^{\mathrm{T}}(\lambda_i E-A))^{\mathrm{T}}$进行 QR 分解:

$$(U_1^{\mathrm{T}}(\lambda_i E - A))^{\mathrm{T}} = [\widetilde{S}_i,\ S_i] \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,\cdots,n-l.$$

c) 任取 $x_i \in S(\lambda_i)$,或 $x_i=S_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n-l)$,这里 α_i 为某一向量,使$[X_q,S_\infty]$满秩.计算 $k_2=\bar{k}_2= \| [X_q,S_\infty \| \ \| XX_q,S_\infty]^{-1} \|$ 给出一个正数 γ.

d) $i=1$.

e) 对以下矩阵进行 QR 分解

$$\begin{bmatrix} x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_{n-l} & \vdots & \begin{matrix} 0 \\ I_{n-l} \end{matrix} \end{bmatrix} = [\widetilde{Q}_i,\tilde{x}_i] \begin{bmatrix} \widetilde{R}_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

再利用 $\| \tilde{x}_i - S_i\alpha_i \| =$ 极小,求出 α_i. 然后 $S_i\alpha_i \to x_i$.

f) $i+1 \to i$,如 $i>n-l$,则 g),否则转 e).

g) 计算 $k_2= \| X_q,S_\infty \| \ \| [X_q,S_\infty]^{-1} \|$,$\Delta k_2=\bar{k}_2-k_2$,如 $\Delta k_2<\gamma$,则停,否则,$k_2 \to \bar{k}_2$,转 d).

由以上两个算法确定 W, X_q 后，可由(10)确定 F.

5 数值例子

设多输入线性定常奇异摄动系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \cdots \\ \varepsilon\dot{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ \hdashline 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \triangleq A \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + Bu. \tag{19}$$

这里 $\varepsilon=0.01$，(19)的主导极点为 8.2494，−4.9928，非主导极点为−109.2567.

我们希望引入状态反馈后，(19)的主导极点为 $-1\pm j$.

我们用广义系统

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \cdots \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ \hdashline 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] u \tag{20}$$

来近似代替(19)，然后用前面所述方法来配置(20)的有限极点，使其等于 $-1\pm j$，这样我们可求出

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

如果将

$$u = F \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{22}$$

代入(19)，可求出闭环奇异摄动系统的极点，即 $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}^{-1}(A+BF)$ 的特征值为 $-1\pm j$，−100. 而如果用其他方法来配置(20)的有限极点，比如求出

$$\widetilde{F} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

它也可使(20)的闭环有限极点为 $-1\pm j$，但将

$$u = \widetilde{F} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{24}$$

代入(19)所得到的闭环奇异摄动系统的极点，即 $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}^{-1}(A+B\widetilde{F})$ 的特征值为 $-1.02\pm 0.96j$，−101.96.

显然反馈(22)比(24)更准确地配置了(19)的闭环主导极点.

6 结　论

本文利用广义系统特征结构配置方法来近似配置奇异摄动系统的闭环主导极点，由于所用方法能保证广义系统的有限闭环极点对系统参数扰动最不敏感，所以这是一种好的近似方法，本文算法中的计算问题均有稳定的算法可用.

参 考 文 献

[1] Moore, B. C.. On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21: 689—692

[2] Klein, G. and Moore, B. C.. Eignevalue-Generalized Eignevector Assignment with State Feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1977, AC-22:140—141

[3] Fahmy, M. M. and O'Reilly, J.. Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems-A Parametric Solution. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, AC-28:990—994

[4] Klein G.. On the Relationships Between Controllability Indexes, Eigenvector Assignment, and Deadbeat Control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:77—94

[5] Chang, M-I. J.. Eigenstructure Assignment by State Feedback. Proc. 1984, Amer. Contr. Conf., San Diego, CA, 1984, 372—377

[6] Kautsky, J., Nichols, N. K. and Dooren, P.. Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. Int. J. Control, 1985, 41(5):1129—1155

[7] Armentano, A. V.. Eigenvalue Placement for Generalised Linear Systmes. Systems and Control Letters, 1984, 4:199—202

[8] Cobb, D. J.. Feedback and Pole Assignment in Descriptor Systems. Int. J. Control, 1981, 33:1135—1146

[9] Fletcher, L. R. and BSc. Dphil. Eigenstructure Assignment by Output Feedback in Descriptor Systems. IEE Proc-D Control Theory and Applications, July 1988, 135(4):302—308

[10] Saidahmed, Mohamed T. F.. A New Approach for Designing a Reduced-Order Controller of Linear Singular Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35:492—495

[11] Ozcaldiran, R. and Lewis, F.. A Geometric Approach to Eigenstructure Assignment for Singular Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32:629—632

[12] Lewis, F. L. and Ozcaldiran, R.. On the Eigenstructure Assignment of Singular Systems. Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Ft Lauderdale, FL, 1985, 179—182

[13] Fletcher, L. R., Kautsky, J. and Nichols, N. K.. Eigenstructure Assignment in Descriptor Systems. IEEE Trans. Autmat Contr., 1986, AC-31:1138—1141

[14] Kautsky, J. and Nichols, N. K.. Algorithm for Robust Pole Assignment in Singular Systems. Proc. 1986 Amer. Contr., Conf., Seattle, WA, 433—436

An Approach to Dominant Pole Assignment in Singularly Perturbed Systems

ZHOU Qijie and CAI Gangqiang

(Department of Automation, South China University of Technology • Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: In this paper a singularly perturbed system is regarded as a singular system with perturbations in the system data. The eigenstructure is assigned for the singular system so that its finite closed-loop poles are as near as possible to the prescribed dominant poles of the singularly perturbed system. Hence, we can assign approximately the prescribed dominant poles of the singularly perturbed system. The algorithms in this paper are numerically stable.

Key words: singularly perturbed sytems; singular systems; pole assignment

本文作者简介

周其节 见本刊 1993 年第 3 期第 262 页.

蔡刚强 见本刊 1993 年第 5 期第 594 页.