第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

连续时间广义边值系统的状态结构

奚宏生
(中国科学技术大学自动化系·合肥,230027)

摘要:连续时间广义边值系统被描述为:$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$,$Mx(0)+Nx(T)=\eta$,其中 E 是奇异方阵,$u(t)$满足任意次可微,本文讨论了这类系统的定义、可解性及其状态结构.

关键词:广义边值系统;适定边界条件;Green 函数矩阵

在文章[1]中,作者定义了连续时间边值系统,并解决了这类系统的一系列状态空间理论问题.文章[2]首次给出了离散时间广义边值系统的定义,并将[1]中的结果推广到了这一新的研究领域.然而对连续时间广义边值系统的研究,至今还未有新的结果,因此本文主要讨论这类系统的状态可解性和状态解的结构.作为对连续时间广义边值系统状态空间理论的初步探讨.

连续时间广义边值系统可以被描述为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0,T]. \tag{0.1}$$

边界条件

$$Mx(0) + Nx(T) = \eta. \tag{0.2}$$

其中 $x(t)$为 n 维状态向量,$u(t)$为 r 维具有任意阶导数的输入向量,E,A,M 和 N 均为 $n\times n$ 常矩阵,B 为 $n\times r$ 常矩阵,η 为 n 维边界输入常向量.(0.1)定义的状态 $x(t)$在$[0,T]$上通常是不连续的,为此我们定义 $x(0)=x(0+0)$,$x(T)=x(T-0)$.当 E 是非奇异阵时,系统(0.1),(0.2)退化为一般的连续时间边值系统(见[1],[3]).当 E 是奇异阵时,系统边界条件(0.2)必须满足一定条件才可能有解.

1 预备知识

关于(0.1)有如下可解定义:

定义 1.1 如果 $\lambda\in \mathrm{R}$,矩阵束 $\lambda E-A$ 是非奇异的,则称(0.1)是可解的,其中 R 是实数域.

在上述定义下,文章[4],[5],[6]和[7]已经给出了一系列系统求解的方法,主要结论如下:

1) 设 $\mathrm{rank}E=n_1<n$,如果(0.1)是可解的,则存在可逆阵 Q,使

$$\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1}E = Q^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}Q,$$

$$\hat{A} = (\lambda E - A)^{-1}A = Q^{-1}\begin{bmatrix} \lambda C - I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda D - I_{n_2} \end{bmatrix}Q.$$

本文于1992年4月17日收到.1992年8月10日收到修改稿.

其中 C 为 $n_1\times n_1$ 满秩矩阵，D 为 $n_2\times n_2$ 幂零矩阵，$\mathrm{ind}(D)=m$，$n_1+n_2=n$. I_{n_1}，I_{n_2}分别为 $n_1\times n_1$ 和 $n_2\times n_2$ 单位矩阵.

2) 矩阵 $\hat{E}$，$\hat{A}$ 的 Drazin 逆记为 $\hat{E}^d$，$\hat{A}^d$. 显然有

$$\hat{E}\hat{E}^d=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,\quad \hat{A}\hat{E}^d=Q^{-1}\begin{pmatrix}C^{-1}(\lambda C-I_{n_1}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,$$

$$\hat{E}^d\hat{A}=\hat{A}\hat{E}^d,\quad \hat{A}^d\hat{E}=\hat{E}\hat{A}^d$$

3) 当输入 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时，(0.1)为

$$E\dot{x}(t)=Ax(t), \tag{1.1}$$

解为

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\hat{E}^d\lambda t}\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0). \tag{1.2}$$

当 $t=0$ 时，允许初始条件应满足

$$\boldsymbol{x}(0)=\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0). \tag{1.3}$$

4) 当输入 $\boldsymbol{u}(t)\neq 0$，并且 $\boldsymbol{u}(t)$满足任意次可微时，系统(0.1)的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=&e^{\hat{E}^d\lambda t}\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{\hat{E}^d\lambda(t-\tau)}\hat{E}^d\hat{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &-(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{B}\boldsymbol{u}^{(i)}(t).\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $\hat{B}=(\lambda E-A)^{-1}B$，当 $t=0$ 时，允许初始条件应满足

$$\boldsymbol{x}(0)=\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0)-(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{B}\boldsymbol{u}^{(i)}(0). \tag{1.5}$$

2　广义边值系统在零输入情形的可解性

当 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时，广义边值系统的形式为(1.1)，(0.2)，由结论(3)知，(1.2)满足(1.1)，当 $t=T$ 时

$$\boldsymbol{x}(T)=e^{\hat{E}^d\lambda T}\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0), \tag{2.1}$$

将(1.3)，(2.1)代入边界条件(0.2)得到

$$(M+Ne^{\hat{E}^d\lambda T})\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}. \tag{2.2}$$

定义 2.1　如果边界条件(0.2)满足 $J=(M+Ne^{\hat{E}^d\lambda T})$可逆，则称(0.2)是适定边界条件.

上述(2.2)在适定边界条件下，可解得

$$\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0)=J^{-1}\boldsymbol{\eta},$$

等价于

$$\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0)=\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}\boldsymbol{\eta}+(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)J^{-1}\boldsymbol{\eta}.$$

比较等式两边，应有

$$\hat{E}\hat{E}^d\boldsymbol{x}(0)=\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}\boldsymbol{\eta},\quad (I_n-\hat{E}\hat{E}^d)J^{-1}\boldsymbol{\eta}=0. \tag{2.3}$$

从(2.3)右边等式可解得

$$\boldsymbol{\eta}=\alpha_1JQ^{-1}\varepsilon_1+\alpha_2JQ^{-1}\varepsilon_2+\cdots+\alpha_{n_1}JQ^{-1}\varepsilon_{n_1}.$$

其中 $\varepsilon_i=(0,0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^\tau$，$i=1,2,\cdots,n_1$；$\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,n_1$，是任意常数，记 $V_0=\{\boldsymbol{\eta}\mid\boldsymbol{\eta}=\alpha_1JQ^{-1}\varepsilon_1+\cdots+\alpha_{n_1}JQ^{-1}\varepsilon_{n_1}\}$，为零输入情形下的广义边值系统的允许边界输入集，当 $\boldsymbol{\eta}\in$

V_0时，将(2.3)左式代入(1.2)得关于系统(1.1)，(0.2)的状态解.

$$x(t)=e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}\eta. \tag{2.4}$$

因此我们有：

定理 2.1　对于广义边值系统(1.1)，(0.2)，如果$(\lambda E-A)$是非奇异的，边界条件是适定的，对任意给定的边界输入$\eta\in V_0$，系统存在唯一的状态解(2.4).

3　一般情形的广义边值系统的可解性

为了解系统(0.1)，(0.2)，我们首先给出下述广义 Green 函数矩阵.

定义 3.1　若函数矩阵$G(t,\tau)$满足

$$G(t,\tau)=\begin{cases}e^{\hat{E}^d\hat{A}t}J^{-1}Me^{-\hat{E}^d\hat{A}\tau}\hat{E}^d, & \tau<t,\\ -e^{\hat{E}^d\hat{A}t}J^{-1}Ne^{\hat{E}^d\hat{A}(T-\tau)}\hat{E}^d, & \tau>t,\end{cases} \tag{3.1}$$

则称$G(t,\tau)$为关于广义边值系统(0.1)，(0.2)的广义 Green 函数矩阵.

广义 Green 函数矩阵满足如下性质：

1) 对固定的$\tau\in(0,T)$，当$t\in[0,T]$且$\tau\neq t$时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t,\tau)=\hat{E}^d\hat{A}G(t,\tau).$$

2) 对固定的$\tau\in(0,T)$，有

$$MG(0,\tau)+NG(T,\tau)=0.$$

3) $G(t,\tau)$在$(t,\tau)\in[0,T]\times[0,T]$ $(t\neq\tau)$处连续，但在$t=\tau$处不连续且有跃度：

$$G(t,\tau-0)-G(t,\tau+0)=\hat{E}^d.$$

证　1)显然.

2) 将(3.1)在$t=0,t=T$的值代入边界条件(0.2)左边，并注意到$M=J-Ne^{\hat{E}^d\hat{A}T}$，此时有

$$\begin{aligned}MG(0,\tau)+NG(T,\tau)=&-(J-Ne^{\hat{E}^d\hat{A}T})J^{-1}Ne^{\hat{E}^d\hat{A}(T-\tau)}\hat{E}^d+\\&+N[e^{\hat{E}^d\hat{A}T}J^{-1}(J-Ne^{\hat{E}^d\hat{A}T})e^{-\hat{E}^d\hat{A}\tau}\hat{E}^d]=0.\end{aligned}$$

3) $G(t,t-0)-G(t,t+0)=e^{\hat{E}^d\hat{A}t}J^{-1}(J-Ne^{\hat{E}^d\hat{A}T})e^{-\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}^d+e^{-\hat{E}^d\hat{A}t}J^{-1}Ne^{\hat{E}^d\hat{A}(T-t)}\hat{E}^d=\hat{E}^d.$

我们记：$V=\{\eta\,|\,\eta=\xi_1+\alpha_1JQ^{-1}\varepsilon_1+\cdots+\alpha_{n_1}JQ^{-1}\varepsilon_{n_1}\}$为广义边值系统(0.1)，(0.2)的允许边界输入集，ξ_1与下面定理 3.1 相同，$U=\{u(t)\,|\,u^{(i)}(t)$在$t\in[0,T]$上存在，$i=1,2,\cdots\}$，为允许输入集，我们给出

定理 3.1　关于广义边值系统(0.1)，(0.2)，如果$\lambda E-A$是非奇异的，边界条件(0.2)是适定的，对任意给定的$\eta\in V$，$u(t)\in U$，则系统存在唯一的状态解

$$\begin{aligned}x(t)=&e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}(\eta-\xi_1)+\hat{E}\hat{E}^d\int_0^TG(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau\\&-(I-\hat{E}\hat{E}^d)\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{B}u^{(i)}(t).\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\xi_1=-M(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{B}u^{(i)}(0)$$

$$-N(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{B}u^{(i)}(T).$$

证　只须验证(3.2)确实满足(0.1),(0.2).令

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t),$$

$$x_1(t)=e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}(\eta-\xi_1)+\hat{E}\hat{E}^d\int_0^T G(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$x_2(t)=-(I-\hat{E}\hat{E}^d)\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{B}u^{(i)}(t).$$

首先对 $x(t)$ 求微商

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=\hat{E}^d\hat{A}e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}(\eta-\xi_1)+\hat{E}\hat{E}^d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t G(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_t^T G(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\\&=\hat{E}^d\hat{A}e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}(\eta-\xi_1)+\hat{E}\hat{E}^d\Big\{\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_t^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau+[G(t,t-0)-G(t,t+0)]\hat{B}u(t)\Big\},\end{aligned}$$

$$\dot{x}_1(t)=\hat{E}^d\hat{A}x_1(t)+\hat{E}^d\hat{B}u(t).$$

两边同乘 $\hat{E}$

$$\hat{E}\dot{x}_1(t)=\hat{E}\hat{E}^d\hat{A}x_1(t)+\hat{E}\hat{E}^d\hat{B}u(t),$$

由于

$$\hat{E}\hat{E}^d\hat{A}=\hat{A}\hat{E}\hat{E}^d,\quad \hat{E}\hat{E}^dx_1(t)=x_1(t),$$

故 $x_1(t)$ 满足方程

$$\hat{E}\dot{x}_1(t)=\hat{A}x_1(t)+\hat{E}\hat{E}^d\hat{B}u(t),\tag{3.3}$$

再对 $x_2(t)$ 求微商,利用[7]中方法直接可得到

$$\hat{E}\dot{x}_2(t)=\hat{A}x_2(t)+(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)\hat{B}u(t).\tag{3.4}$$

将(3.3)和(3.4)相加,得知 $x_1(t)+x_2(t)$ 是方程

$$\hat{E}[\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t)]=\hat{A}[x_1(t)+x_2(t)]+\hat{B}u(t)$$

的解,从而 $x_1(t)+x_2(t)$ 也是方程(0.1)的解.

由于 $\eta\in V$,即 η 满足 $(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)J^{-1}(\eta-\xi_1)=0$,等价于 $J^{-1}(\eta-\xi_1)=\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}(\eta-\xi_1)$,将(3.2)在 $t=0,t=T$ 的表达式代入适定边界条件(0.2),并由 Green 函数矩阵性质(2),可得到

$$Mx(0)+Nx(T)=J\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}(\eta-\xi_1)+\xi_1=\eta.$$

(3.2)满足边界条件(0.2).

假定 $\bar{x}(t)$ 是广义边值问题(0.1),(0.2)的另一个不同于 $x(t)$ 的解,设 $y(t)=\bar{x}(t)-x(t)$,$y(t)$ 应满足 $E\dot{y}(t)=Ay(t)$,$My(0)+Ny(T)=0$,由定理 2.1 知 $y(t)\equiv0$,唯一性得证.

如果我们设 $R(\hat{E}\hat{E}^d)$ 是矩阵 $\hat{E}\hat{E}^d$ 中 n 个线性无关的列向量所生成的 n_1 维子空间,$R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$ 是矩阵 $(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$ 中 n_2 个线性无关的列向量所生成的 n_2 维子空间,则

$$R(\hat{E}\hat{E}^d)\oplus R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)=\widetilde{R},$$

$\widetilde{R}$ 为 n 维空间.

连续时间广义边值线性系统(0.1),(0.2)的状态解(3.2):$x(t)=x_1(t)+x_2(t)\in\tilde{R}$,并且 $x_1(t)\in R(\hat{E}\hat{E}^d)$,$x_2(t)\in R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$.

4 结束语

从本文给出的解(3.2)的结构可知,$x_2(t)$完全保留了一般连续时间广义系统所对应的解的形式和特性(见[6]).因此,我们可以引用一般广义系统的处理方法在 $R(I_n-\hat{E}\hat{E}^d)$ 空间中讨论 $x_2(t)$的一系列状态特性.

关于解 $x_1(t)$,我们构造的广义 Green 函数矩阵具有一般连续时间边值系统的 Green 函数矩阵所具有的类似的性质(见[1],[3]),特别,当我们采用输入 $u(t)$满足 $u^{(i)}(0)=u^{(i)}(T)=0,i=1,2,\cdots$,即仅对区间内部进行控制,此时 $\xi_1=0,\eta\in R(\hat{E}\hat{E}^d)$,$x_2(t)$对边界条件没有贡献.

$$x_1(t)=e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}\hat{E}^dJ^{-1}\eta+\hat{E}\hat{E}^d\int_0^T G(t,\tau)\hat{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

如果我们令 $u(\tau)=f^2(\tau)\hat{B}^\tau G^\tau(t,\tau)(\hat{E}\hat{E}^d)^\tau$(例如令 $f(\tau)=\tau^m(\tau-T)^m,u^{(i)}(0)=u^{(i)}(T)=0,i=1,2,\cdots$),可以得到对应于 Krener[1]的内向能控矩阵

$$w(f,t)\triangleq\hat{E}\hat{E}^d\int_{\tau_1}^{\tau_2}f(\tau)G(t,\tau)\hat{B}\hat{B}^\tau G^\tau(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau(\hat{E}\hat{E}^d)^\tau.$$

其中$[\tau_1,\tau_2]\subset(0,T)$.

类似的,内向能观矩阵为

$$V(f,t)\triangleq(\hat{E}\hat{E}^d)^\tau\int_{\tau_1}^{\tau_2}f(\tau)G^\tau(\tau,t)C^\tau CG(\tau,t)f(\tau)\mathrm{d}\tau\hat{E}\hat{E}^d.$$

由此可见,本文所构造的解的形式对进一步将 Krener 在[1]中的一系列有关边值系统状态空间理论的结果推广到连续时间广义边值系统这一新的研究领域开拓了一条新的途径.

参考文献

[1] Krener, A. J.. Acausal Realiation Theory, Part 1: Linear Deterministic Systems. SIAM. J. Control and Optimization, 1987, 25(3):499—525

[2] Nikoukhah, R., Willsky, A. S. and Levy, B. C.. Boundary Value Descriptor Systems: Well-Posedness, Reachability and Observability. Int. J. Control, 1987, 46(5):1715—1737

[3] Xi Hongsheng and Yang Xiaoxian. Controllability, Observability and Duality of Boundary Valve Linear Systems. J. USTC, 1989, 19(3):22—31

[4] Gantmacher, F. R.. The Theory of Matrices. New York, Chelsea. 1974, 2

[5] Luenberfger, D. G.. Time-Invariant Descriptor Systems. Automatic, 1978, 14:473—480

[6] Elizabeth, L. Yip and Richard F. Sincove. Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems. IEEE Tran. Automat. Contr., 1981, 26(3):702—707

[7] 张金水.广义系统经济控制论.北京:清华大学出版社,1990

On the State Structure of Continuous-Time Boundary Value Descriptor Systems

XI Hongsheng

(Department of Automation, University of Science and Technology of China • Hefei, 230026, PRC)

Abstract: A class of continuous-time boundary value descriptor systems is described as $E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$, with the boundary condition $Mx(0)+Mx(T)=\eta$, E is singular and $u(t)$ is a function which can be differentiated for sufficiently many times. In this paper, we discuss definition, solvability and state structure of these systems.

Key words: boundary value descriptor systems; well-posed boundary condition; Green function matrix

本文作者简介

奚宏生 1950年生. 毕业于中国科技大学数学系，获理科硕士学位. 曾在青岛大学数学系任教，现任中国科技大学自动化系讲师. 在现代控制理论及应用方面发表学术论文二十余篇. 目前从事边值系统和鲁棒控制设计等方面的研究工作.