第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

线性时滞不确定系统的鲁棒性研究

田连江　高为炳　$\boxed{\text{程　勉}}$

(北京航空航天大学第七研究室,100083)

摘要：本文研究了具有一般摄动表达形式的时滞不确定系统. 将不确定项分解为“秩 1”形式和相乘形式，利用 Lyapunov 方法和二次镇定的概念，求得了较为完善的充分条件，并举例验证.

关键词：不确定系统；Lyapunov 函数；二次镇定；时滞

1 引　言

在实际系统中,由于模型误差、测量误差和线性化近似,不确定就会出现在控制系统中,这些不确定项给原来稳定系统的鲁棒稳定性分析带来了许多研究课题,最近十几年来,许多人致力于这方面的研究,并取得了一些很好的结果[1,2,5]. 另外,由于测量的不灵敏性、元件老化等原因,系统中就会出现时滞,近几年来,检验时滞系统的稳定性及其镇定性问题,人们也进行了探讨研究[3,4,6,7,8,9]. 时滞系统是实际过程控制中经常遇到的,因此,对它的研究更具有理论价值和实际意义. 对于时滞系统,在已报告的成果中,作者一般是利用各种不等式技巧,或用 Lyapunov 方法求得一个镇定系统的充分条件[3,4,8,9]. 本文用以上两种方法,求得了两个较为完善的充分条件,并用实例加以验证.

2 主要结果 1

研究系统：

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(r(t))]x(t) + [B + \Delta B(s(t))]x(t-h) + Cu(t). \tag{1}$$

$x(t) \in \mathrm{R}^n$ 是状态，$u(t) \in \mathrm{R}^m$ 是控制. h 是时滞，(A,B,C) 是适当维数的标称系统矩阵. 系统中的不确定项是以 $r(t), s(t)$ 的函数形式表现出来的，这里 $r(t), s(t)$ 是 Lebesgue 可测的，且在紧集 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 中变化：

$$\begin{aligned} \mathscr{R} &= \{r: r_i \leqslant \varepsilon_i \bar{r}, \quad i = 1,2,\cdots,k, \quad \varepsilon_i < 1\}, \\ \mathscr{S} &= \{s: s_j \leqslant \beta_j \bar{s}, \quad j = 1,2,\cdots,l, \quad \beta_j < 1\}. \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\qquad r(t) = [r_1(t),\cdots,r_k(t)]^{\mathrm{T}}, \quad s(t) = [s_1(t),\cdots,s_l(t)]^{\mathrm{T}},$

并假定不确定项具有“秩 1”形式，即

$$\Delta A(r(t)) = \sum_{i=1}^{k} A_i r_i(t), \quad \Delta B(s(t)) = \sum_{j=1}^{l} B_j s_j(t). \tag{3}$$

这里的

$$\mathrm{rank}(A_i) = 1, \quad i = 1,\cdots,k,$$
$$\mathrm{rank}(B_j) = 1, \quad j = 1,\cdots,l.$$

根据“秩 1”假设 A_i, B_j 可以表示为：

$$A_i = d_i e_i^{\mathrm{T}}, \quad i = 1,\cdots,k; \quad B_j = f_j g_j^{\mathrm{T}}, \quad j = 1,\cdots,l. \tag{4}$$

本文于1991年11月27日收到. 1993年6月29日收到修改稿.

这里 d_i,e_i,f_j,g_j 是 n 维向量.

引入记号：

$$T \triangleq \bar{r}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i d_i \cdot d_i^{\mathrm{T}},\quad U \triangleq \bar{r}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i e_i \cdot e_i^{\mathrm{T}},$$
$$W \triangleq \bar{s}\sum_{j=1}^{l}\beta_j g_j \cdot g_j^{\mathrm{T}},\quad V \triangleq \bar{s}\sum_{j=1}^{l}\beta_j f_j \cdot f_j^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

我们的研究目的是确定反馈控制：

$$u(t) = Kx(t) + Lx(t-h) \tag{6}$$

使得系统(1)对于任何的 $r(t),s(t)$ 和任何初始状态 $x_0\in \mathrm{R}^n$ 都有 $x(t)\to 0$，这样的控制 $u(t)$ 我们称为鲁棒镇定控制.

定义 1　对系统(1)，若存在反馈(6)，和常数 $\alpha>0$，对于适当的 Lyapunov 函数 $V(\cdot)$，有 $V(\cdot)$ 沿系统(1)的导数：

$$\dot{V}(\cdot)\leqslant -\alpha\|x(t)\|^2,\quad \forall (x,t)\in \mathrm{R}^n\times \mathrm{R},$$

则称系统(1)是二次可镇定的.

由状态反馈(6)后，闭环系统为

$$\dot{x}(t) = [A + CK + \Delta A(r(t))]x(t) + [B + CL + \Delta B(s(t))]x(t-h). \tag{7}$$

记
$$\bar{A} = A + CK,\quad \bar{B} = B + CL,$$
则
$$\dot{x}(t) = [\bar{A} + \Delta A(\cdot)]x(t) + [\bar{B} + \Delta B(\cdot)]x(t-h). \tag{8}$$

我们选准 Lyapunov 函数：

$$V(x,h) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s.$$

P,Q 皆为正定对称阵. 易验证：

a) $\lambda_{\min}(P)\cdot\|x(t)\|^2\leqslant V(\cdot)\leqslant\lambda_{\max}(P)\|x(t)\|^2+h\lambda_{\max}(Q)\|x(t)\|^2.$

这里
$$x(t) = \sup_{s\in(t-h,t)} x(s).$$

又因 $V(0,0)=0$，故 $V(\cdot)$ 是 Lyapunov 函数.

因此，只须再证明：

b) $\dot{V}(\cdot)<-\alpha\|x(t)\|^2,\quad \alpha>0.$

为此，将 $V(\cdot)$ 沿系统(8)求导有：

$$\dot{V}(\cdot) = [x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-h)]\begin{bmatrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A}^{\mathrm{T}} + Q & P\bar{B}\\ \bar{B}^{\mathrm{T}}P & -Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}$$
$$+ [x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-h)]\begin{bmatrix}\Delta A^{\mathrm{T}}(\cdot)P + P\Delta A(\cdot) & P\Delta B(\cdot)\\ \Delta B^{\mathrm{T}}(\cdot)P & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}.$$

又有

$$[x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-h)]\begin{bmatrix}\Delta A^{\mathrm{T}}(\cdot)P + P\Delta A(\cdot) & P\Delta B(\cdot)\\ \Delta B^{\mathrm{T}}(\cdot)P & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}$$
$$= 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta A(\cdot)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta B(\cdot)x(t-h)$$
$$= 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Big[\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\bar{r}d_ie_i^{\mathrm{T}}\Big]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Big[\sum_{j=1}^{l}f_jg_j^{\mathrm{T}}s_j(t)\Big]x(t-h)$$
$$\leqslant 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Big[\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\bar{r}d_ie_i^{\mathrm{T}}\Big]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Big[\sum_{j=1}^{l}f_jg_j^{\mathrm{T}}\beta_j\bar{s}\Big]x(t-h)$$

$$\leqslant \bar{r}\{\sum_{i=1}^{k}(x^{\mathrm{T}}(t)P\sqrt{\varepsilon_i}d_i)^2+\sum_{i=1}^{k}(\sqrt{\varepsilon_i}e_i^{\mathrm{T}}x(t))^2\}$$

$$+\bar{s}\{\sum_{j=1}^{l}(x^{\mathrm{T}}(t)P\sqrt{\beta_i}f_i)^2+\sum_{j=1}^{l}(g_j^{\mathrm{T}}\sqrt{\beta_j}x(t-h))^2\}$$

$$=x^{\mathrm{T}}(t)PTPx(t)+x^{\mathrm{T}}(t)Ux(t)+x^{\mathrm{T}}(t)PVPx(t)+x^{\mathrm{T}}(t-h)Wx(t-h)$$

$$=[x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-h)]\begin{bmatrix}P(T+V)P+U & 0\\ 0 & W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}.$$

因此

$$\dot{V}(\cdot)\leqslant-[x^{\mathrm{T}}(t),x^{\mathrm{T}}(t-h)]\begin{bmatrix}-\bar{A}^{\mathrm{T}}P-P\bar{A}-P(T+V)P-Q-U & -P\bar{B}\\ -\bar{B}^{\mathrm{T}}P & Q-W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}.$$

记
$$Y=\begin{bmatrix}-\bar{A}^{\mathrm{T}}P-P\bar{A}-P(T+V)P-Q-U & -P\bar{B}\\ -\bar{B}^{\mathrm{T}}P & Q-W\end{bmatrix}.$$

要证 $\dot{V}(\cdot)<-\alpha\|x(t)\|^2$ 只须证 Y 是正定的，由矩阵矩知识可知 Y 是正定的充要条件为

$$\begin{cases}Q-W>0,\\ -\bar{A}^{\mathrm{T}}P-P\bar{A}-P(T+V)P-Q-U-P\bar{B}(Q-W)^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}P>0.\end{cases}$$

因此，我们有定理：

定理 1 系统(1)是二次可镇定的充分条件是：存在 K,L 使状态反馈(6)对适当的 $P,Q>0$ 有

$$\begin{cases}Q-W>0,\\ \bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+P[T+V+\bar{B}(Q-W)^{-1}\bar{B}]P+Q+V<0\end{cases}$$

成立.

例 1 作为一个例子，研究二维系统：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+r & \frac{r^2}{2}\\ r & -2+\frac{r^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s^2 & 1-s\\ -1+s^2 & -s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-h)\\ x_2(t-h)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t).$$

这里 $|r|\leqslant\sqrt{2}$，$|s|<1$. 因此，$\bar{r}=2$，$\bar{s}=1$. 由系统知：

$$\Delta A(\cdot)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[1,\ 0]r+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}[0,\ 1]r^2=d_1e_1^{\mathrm{T}}r+d_2e_2^{\mathrm{T}}r^2,$$

$$\Delta B(\cdot)=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}[0,\ 1]s+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[1,\ 0]s^2=f_1g_1^{\mathrm{T}}s+f_2g_2^{\mathrm{T}}s^2.$$

根据 ε_i,β_j 的选择法可选 $\varepsilon_i=\beta_i=1$. 因此

$$T\triangleq\bar{r}\sum_{i=1}^{2}d_id_i^{\mathrm{T}}=\frac{5}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad U\triangleq\bar{r}\sum_{i=1}^{2}e_ie_i^{\mathrm{T}}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$W\triangleq\bar{s}\sum_{j=1}^{2}g_jg_j^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad V\triangleq\bar{s}\sum_{j=1}^{2}f_jf_j^{\mathrm{T}}=2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

我们选

$$K = [-6, 12], \quad L = 0,$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

易验证

$$Q - W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

且

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}P + P\overline{A} + P(T + V)P + Q + U + P\overline{B}(Q - W)^{-1}\overline{B}P = \begin{bmatrix} -\frac{29}{8} & -\frac{39}{4} \\ -\frac{39}{4} & -\frac{37}{2} \end{bmatrix} < 0.$$

由定理 1 知此系统是可以二次镇定的.

3 主要结果 2

研究系统

$$(\Sigma):\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A(s(t))]x(t) + [B + \Delta B(s(t))]x(t-h) + Cu(t), & t \geqslant 0, \\ x = \varphi(t), & -h \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

$x(t) \in \mathrm{R}^n, u(t) \in \mathrm{R}^m, h > 0, A, B, C$ 常阵. $s(t)$是不确定参数. $\Delta A(\cdot), \Delta B(\cdot)$是不确定项. $\varphi(t)$是$[-h, 0]$上的连续函数.

我们的目的是确定反馈控制 $u(t) = Kx(t)$来镇定系统(Σ). 为此我们作如下假定:

假设 1 存在适当维数的常阵 D, E,使得广义匹配条件成立. 即$[\Delta A(\cdot), \Delta B(\cdot)] = DF(s(t))E, F(s(t)) \in \mathrm{IF} \subset \mathrm{R}^{s \times 2n}, \mathrm{IF} \triangleq \{F(s(t)): F^{\mathrm{T}}(s)F(s) \leqslant I\}$.

假设 2 标称系统(A, B, C)对任意给定的正定阵 R 和适当的 $W > 0$,以下的 Riccati 方程有正定对称解 $P: -A^{\mathrm{T}}P + P(-A) + W - R - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P = 0$.

由以上假设,我们定义

$$Q = -\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + R & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -R \end{bmatrix}.$$

易验证,在假设 2 的保证下,Q 对称正定.

对于系统(Σ),有定理:

定理 2 若假设 1 和 2 成立,且存在适当的常数 $\varepsilon > 0, P > 0$ 满足:

$$\begin{cases} Q - \frac{1}{\varepsilon}EE^{\mathrm{T}} > 0, & (\mathrm{I}) \\ 2PCC^{\mathrm{T}} - \varepsilon DD^{\mathrm{T}} \geqslant 0. & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

则系统(Σ)是可二次镇定的.

证 我们选准 Lyapunov 函数:

$$V(\cdot) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s.$$

设反馈控制为 $u(t) = -PC^{\mathrm{T}}Px(t)$.

$V(\cdot)$沿系统(Σ)的导数为:

$$\dot{V}(\cdot)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-h)]\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA+R & PB\\ B^{\mathrm{T}}P & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}\cdot$$

$$-2Px^{\mathrm{T}}(t)PCC^{\mathrm{T}}Px(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)P[\Delta A(\cdot),\Delta B(\cdot)]\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}$$

$$=-Z^{\mathrm{T}}(t)QZ(t)-2Px^{\mathrm{T}}(t)PCC^{\mathrm{T}}Px(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)PDF(\cdot)EZ(t).$$

其中
$$Z(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}.$$

因
$$2x^{\mathrm{T}}(t)PDF(\cdot)EZ(t)\leqslant\varepsilon x^{\mathrm{T}}(t)PDD^{\mathrm{T}}Px(t)+\frac{1}{\varepsilon}Z^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}EZ(t)\quad(\text{对}\ \forall\ \varepsilon>0),$$

故
$$\dot{V}(\cdot)\leqslant-Z^{\mathrm{T}}(t)[Q-\frac{1}{\varepsilon}EE^{\mathrm{T}}]Z(t)-x^{\mathrm{T}}(t)P[2PCC^{\mathrm{T}}-\varepsilon DD^{\mathrm{T}}]Px(t),$$

因此，只须要求定理中的(Ⅰ)和(Ⅱ)式成立. 证毕.

4 结 论

由上面两个定理说明：具有时滞的线性不确定系统，在时滞不太大时，若标称系统稳定则能够找到一个不依赖于时滞的镇定控制的. 但时滞也不能太大，否则将破坏鲁棒镇定性质，参见[10].

参 考 文 献

[1] Pertersen, I. R. and Hollot, C. V.. A Riccati Equation Approach to the Stabilizatin of Uncertain Linear Systems. Automatica, 1986, 22(4):397—411

[2] Schmitendorf, W. E.. Designing Stabilization Controller for Uncertain Systems Using the Riccati Equation Approach. IEEE Automat. Contr., 1988, AC-33(4):376—379

[3] Ikeda, M.. Stabilization of Linear Systems with Time-Varying Delay. IEEE Automat. Contr., 1979, AC-24(4):369—370

[4] Mori, T. et. al.. A Way to Stabilize Linear Systems with Delayed State. Automatica, 1983, 19(5):571—573

[5] Zhou, K. et. al.. Robust Stabilization of Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty. Syst. & Contr. Lett., 1988, 10:17—20

[6] Feliachi, A. and Thowsen, A.. Memoryless Stabilization of Linear Delay-Differential Systems. IEEE Automat. Contr., 1981, AC-26(2):571—573

[7] Barszsz, M. and Olbrot, A. W.. Stability Criterion for a Linear Differential-Difference Systems. IEEE Automat. Contr., 1979, AC-24(2):368—370

[8] Lee, E. B. et. al.. A Lyapunov Theory for Linear Time-Delay Systems. IEEE Automat. Contr., 1986, AC-31(3):259—261

[9] Brierley, S. D. et. al. On Stability Independent of Delay for Linear Systems. IEEE Automat. Contr., 1982, AC-27(1):252—256

[10] Olbert, A. W.. A Sufficiently Large Time-Delay in Feedback Loop Must Destroy Exponential Stability of Any Decay Rate. IEEE Automat. Contr., 1984, AC-29(4):367—368

On the Robust Stabilization of Linear Uncertain Time-Delay System

TIAN Lianjiang, GAO Weibing and CHENG Mian

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics • Beijing, 100083, PRC)

Abstract: In this paper, by using Lyapunov function and the concept of quadratic stabilization; the robust problem of the linear time-delay system with perturbation in the general form: the "rank-1" form and tri-multiple form are studied, generalized sufficient condition is obtained. Finally, we give the example to show the theorem.

Key words: uncertain system; Lyapunov function; quadratic stabilization; time-delay

本文作者简介

田连江 1966 年生. 1987 年 7 月毕业于山东大学数学系控制理论专业，同年考入北京航空航天大学第七研究室自动控制理论及应用专业硕士研究生，1990 年 6 月获硕士学位并分配到石油大学(北京)过程控制与仿真研究室工作，现为讲师. 研究兴趣为鲁棒控制，过程控制与计算机仿真.

高为炳 见本刊 1993 年第 4 期第 450 页.

程勉 1932 年生. 博士生导师. 1953 年毕业于北京航空学院；1958 年任该院讲师；1980 年任副教授；1986 年任教授. 学术兴趣为一般力学，非线性振动，非线性控制系统，机器人动力学与控制，智能控制等. 曾任中国自动化学会控制理论专业委员会委员.