第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

奇异系统能量受限的输出调节通过一般状态反馈的可解性

谭连生
(中国科学院武汉数学物理研究所·武汉,430071)

摘要: 本文讨论奇异系统的能量受限的输出调节问题. 在不考虑闭环正则化约束的情况下,得到了通过一般状态反馈来实现这种输出调节的充要条件.

关键词: 奇异系统; 输出调节; Drazin 逆

1 引 言

考虑如下线性时不变奇异系统

$$\theta:\begin{cases}E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\\ y(t) = Dx(t).\end{cases}$$

这里 $E,A:X\to X,B:U\to X,D:X\to Y$ 为映射,E 为奇异的,E,A 满足正则束条件

$$\det(sE - A) \not\equiv 0,\quad s\in \mathrm{C},\mathrm{C}\text{ 为复平面}. \tag{1}$$

所谓奇异系统能量受限的输出调节,即寻求一般状态反馈

$$u(t) = Fx(t), \tag{2}$$

使闭环系统

$$\theta_F:\begin{cases}E\dot{x}(t) = (A + BF)x(t),\\ y(t) = Dx(t)\end{cases}$$

满足

a) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$,

b) $\int_0^{+\infty} u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\mathrm{d}t < +\infty$,其中 $R = R^{\mathrm{T}} > 0$,即 R 为对称正定矩阵.

对于上述同样的问题,文[1]给出了通过 MPD 反馈[2]来实现的充分条件. 由于 MPD 反馈中含有状态变量的导数,这种形式的缺点是对噪声有放大,因此寻求由一般状态反馈来实现输出调节无疑是很有意义的.

设 P_1为一可逆矩阵,使

$$P_1^{-1}EP_1 = \begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix},$$

$\det M\neq 0$,Q 为幂零的,记

$$V \triangleq \begin{bmatrix}M^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad W \triangleq \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}.$$

本文于1992年4月20日收到. 1992年11月9日收到修改稿.

那么矩阵 $\widetilde{E}=P_1VP_1^{-1}$称为 E 的 Drazin 逆. 若 E 为幂零的,则 $\widetilde{E}=0$.

记 $\mathscr{M}\triangleq \mathrm{Im}V$, $\mathscr{N}\triangleq\ker V$,注意到

$$\mathscr{N}=\ker\widetilde{E}=\ker E\widetilde{E},\quad \mathscr{M}=\mathrm{Im}E\widetilde{E}.$$

若 $k=\dim N$,那么 Q 是 $k\times k$ 矩阵,$E\widetilde{E}$ 为从 X 到 $\mathscr{M}$ 的投影. $(I-E\widetilde{E})$为从 X 到 $\mathscr{N}$ 的投影.

若 E,A 满足正则束条件,且 E,A 为可交换的,即 $EA=AE$,容许控制 $u(t)\in U$ 为 k 次连续可微的,那么方程 $E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$的可能的初始点为[4]

$$x_0=E\widetilde{E}q+(I-E\widetilde{E})\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r(E\widetilde{A})^r\widetilde{A}Bu^{(r)}(0). \tag{3}$$

式中 $u^{(r)}(0)$为 $u(t)$在 $t=0$处的第 r 阶导数.

方程的解为[4]

$$x(t;E\widetilde{E}q,Bu(t))=[\exp(\widetilde{E}At)]E\widetilde{E}q+\widetilde{E}\int_0^t\exp(\widetilde{E}A(t-s))Bu(s)\mathrm{d}s$$
$$+(I-E\widetilde{E})\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r(E\widetilde{A})^r\widetilde{A}Bu^{(r)}(t). \tag{4}$$

若 E,A 满足正则束条件,但 E,A 为不可交换的,则变换 $y(t)=x(t)\exp(\lambda t)$将方程

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

变为

$$(\lambda E-A)^{-1}E\dot{y}(t)=-y(t)+(\lambda E-A)^{-1}Bu(t)\exp(\lambda t)$$

对某一 $\lambda\in\mathbb{C}$. 由上方程形式可看出 E,A 可交换实质上不成为我们的约束.

2　问题的解

设 $\mathscr{A}_{\widetilde{E}A}(\lambda)$表示对应 $\widetilde{E}A$ 的最小多项式,并记 $\mathscr{A}_{\widetilde{E}A}(\lambda)\triangleq\mathscr{A}^+_{\widetilde{E}A}(\lambda)\mathscr{A}^-_{\widetilde{E}A}(\lambda)$, $\mathscr{A}^+_{\widetilde{E}A}(\lambda)$, $\mathscr{A}^-_{\widetilde{E}A}(\lambda)$的零点分别在 $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$($\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$分别为闭的右半复平面,开的左半复平面).

记

$$\mathscr{X}^+(\widetilde{E}A)\triangleq\ker\mathscr{A}^+_{\widetilde{E}A}(\widetilde{E}A), \tag{5}$$

$$\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)\triangleq\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)+(\widetilde{E}A)\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)+\cdots+(\widetilde{E}A)^{n-1}\mathrm{Im}(\widetilde{E}B), \tag{6}$$

$$\Theta^*(\widetilde{E};A,D)\triangleq\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker D(\widetilde{E}A)^i. \tag{7}$$

那么,对1中所叙述的问题,我们有如下结论.

定理　奇异系统能量受限的输出调节通过一般状态反馈可解的充分必要条件为

$$\mathscr{X}^+(\widetilde{E}A)\subset\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)+\Theta^*(\widetilde{E};A,D).$$

为了证明上述结果,我们需要如下结论.

引理 2.1　$\lim\limits_{t\to\infty}H_1\exp(H_2t)=0\Leftrightarrow\mathscr{X}^+(H_2)\subset\ker H_1$. 其中 H_1,H_2为适当阶数的矩阵.

这是文[5]中首先加以叙述的,其证明也容易,在此略去.

文[6]中证明了如下有用结论.

引理 2.2　若 $\Delta\subset X$,使 $\mathscr{X}^+(A)+A\Delta+\mathrm{Im}B\subset\delta$ 那么 $\mathscr{X}^+(A+BF)\subset\delta$,对$\forall$ F.

另外,我们也可轻易地得到如下结果.

引理 2.3　对奇异系统 Θ,若 $\mathscr{X}^+(\widetilde{E}A)\subset\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)$,则存在 F 使 Θ_F 中 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

证　由[7]知:若 $\mathscr{X}^+(\widetilde{E}A)\subset\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)$,则对正常系统

$$\dot{x}_1(t)=\widetilde{E}Ax_1(t)+\widetilde{E}Bu(t)$$

存在 F,使其闭环系统

$$\dot{x}_1(t) = (\tilde{E}A + \tilde{E}BF)x_1(t) \tag{8}$$

满足 $$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0.$$

由(4)知 Θ_F 的解为

$$x(t) = [\exp(\tilde{E}(A + BF))t]E\tilde{E}q$$

与(8)的解比较可知也有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

证毕.

定理的证明

必要性:设存在 F,a),b)得以满足,由(4)知对 Θ_F

$$u(t) = F[\exp(\tilde{E}(A + BF)t)]E\tilde{E}q, \tag{9}$$

$$y(t) = D[\exp(\tilde{E}(A + BF)t)]E\tilde{E}q. \tag{10}$$

注意到 b)等价于

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0. \tag{11}$$

由(9)~(11)知,a),b)得以满足当且仅当

$$\lim_{t\to\infty} D[\exp(\tilde{E}(A + BF)t)] = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty} F[\exp(\tilde{E}(A + BF)t)] = 0. \tag{13}$$

利用引理2.1,(12),(13)等价于以下两式

$$\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)) \subset \ker D, \tag{14}$$

$$\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)) \subset \ker F. \tag{15}$$

由(14),(15)我们有:

$$\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)) \subset \Theta^*(\tilde{E};A,D). \tag{16}$$

这是因为:由(15)

$$\begin{aligned}[\tilde{E}(A + BF)]\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)) &= \tilde{E}A\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)) \\ &\subset \mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)).\end{aligned} \tag{17}$$

因此,$\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A+BF))$为 $\tilde{E}A$ 不变的,且 $\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A+BF))\subset\ker D$,而 $\Theta^*(\tilde{E};A,D)$为包含于 $\ker D$ 中的最大的 $\tilde{E}A$ 不变子空间,故有(16)式成立.

由(16)并注意到

$$(\tilde{E}A)[\Theta^*(\tilde{E};A,D) + \mathscr{R}(\tilde{E};A,B)] \subset \Theta^*(\tilde{E};A,D) + \mathscr{R}(\tilde{E};A,B)$$

和 $$\operatorname{Im}(\tilde{E}B) \subset \mathscr{R}(\tilde{E};A,B),$$

有

$$\begin{aligned}&\mathscr{X}^+(\tilde{E}(A + BF)) + [\tilde{E}(A + BF)][\Theta^*(\tilde{E};A,D) + \mathscr{R}(\tilde{E};A,B)] + \operatorname{Im}(\tilde{E}B) \\ &\subset \Theta^*(\tilde{E};A,D) + \mathscr{R}(\tilde{E};A,B).\end{aligned}$$

运用引理2.2,以 $\Theta^*(\tilde{E};A,D)+\mathscr{R}(\tilde{E};A,B)$替代 Δ,$\tilde{E}(A+BF)$代替其中的 A,$\tilde{E}B$ 代替 B 得到

$$x^+(\tilde{E}(A + BF) + \tilde{E}BF_1) \subset \Theta^*(\tilde{E};A,D) + \mathscr{R}(\tilde{E};A,B), \quad \forall F_1.$$

在上式中令 $F_1=-F$,必要性得证.

充分性：令 $\overline{X}=X/\Theta^*(\widetilde{E};A,D)$ 为 X 模 $\Theta^*(\widetilde{E};A,D)$ 的商子空间，其中的元素记为 $\bar{x}$，若 $P:X\to\overline{X}$ 为标准投影. 因为 $(\widetilde{E}A)\Theta^*(\widetilde{E};A,D)\subset\Theta^*(\widetilde{E};A,D)$.

令 $\overline{(\widetilde{E}A)}:\overline{X}\to\overline{X}$ 为由 $\widetilde{E}A$ 在 $\overline{X}$ 上产生的诱导影射，即 $P(\widetilde{E}A)=\overline{(\widetilde{E}A)}P$，记 $\overline{(\widetilde{E}B)}\triangleq P(\widetilde{E}B)$.

同理记 $\overline{E}:\overline{X}\to\overline{X}$ 为由 E 在 X 上产生的诱导影射，$\overline{A},\overline{B}$ 意义同 $\overline{(\widetilde{E}A)},\overline{(\widetilde{E}B)}$，$\overline{D}:\overline{X}\to Y$ 使 $\overline{D}P=D$，$\overline{D}$ 存在因为 $\ker P=\Theta^*(\widetilde{E};A,D)\subset\ker D$，记

$$\overline{\mathscr{R}}=\overline{\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)}=\sum_{i=1}^{n}\overline{(\widetilde{E}A)}^{i-1}\,\overline{\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)}$$

这里维数 $\overline{X}=\bar{n}$，$\bar{a}=\bar{a}^{+}\bar{a}^{-}$，对于映射 $\overline{\widetilde{E}A}$，记 $\overline{\mathscr{X}}^{+}\overline{(\widetilde{E}A)}\triangleq\ker\overline{\mathscr{A}}^{+}_{\overline{(\widetilde{E}A)}}\overline{(\widetilde{E}A)}$，文献[6]中证明了

$$\overline{\mathscr{X}}^{+}\overline{(\widetilde{E}A)}\subset\overline{\mathscr{R}}\Leftrightarrow\mathscr{X}^{+}(\widetilde{E}A)\subset\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)+\Theta^*(\widetilde{E};A,D).$$

现在设
$$\mathscr{X}^{+}(\widetilde{E}A)\subset\mathscr{R}(\widetilde{E};A,B)+\Theta^*(\widetilde{E};A,D),$$
那么
$$\overline{\mathscr{X}}^{+}\overline{(\widetilde{E}A)}\subset\overline{\mathscr{R}},$$
因此对于商奇异系统

$$\overline{\Theta}:\begin{cases}\overline{E}\dot{\bar{x}}(t)=\overline{A}\bar{x}(t)+\overline{B}u(t),\\ y(t)=\overline{D}\bar{x}(t).\end{cases}$$

由引理2.3知存在 $\overline{F}$，使 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{x}(t)=0,\forall\ \bar{x}(0)$.

令 $F=\overline{F}P$，便可对 Θ_F 得到 a)，b).　　证毕.

3 几点注记

注 1　在对奇异系统进行伺服机构的设计时，我们往往把跟踪误差(即参考输入和相应输出之间的差)看作是被调节的变量，而 b)即要求对预定的目标进行控制的花费的能量受限制，此时我们的结论具有明显的物理背景和应用.

注 2　本文没有考虑闭环正则化约束，即不能保证所获得的闭环系统其状态解的唯一性；同时也没有考虑去掉脉冲模. 如何利用一般状态反馈在使闭环系统正则化和去掉脉冲模的情况下达到输出调节的目的，这有待于进一步研究.

参 考 文 献

[1] 邹云，杨成梧. 广义系统的能量受限的输出调节. 控制理论与应用，1991，8(2)：201—205

[2] Bhattacharyya, S. P.. Output Regulation with Bounded Energy. IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, AC-18：381—383

[3] Zheng Zhou, Shayman, Mark A.. Singular Systems：New Methods of Time-Domain Analysis. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(1)：42—50

[4] Fletcher, L. R.. Regularizability of Descriptor Systems. Int. J. Systems Sci, 1986, 17(6)：834—847

[5] Campbell, S. L., Meyer, C. D. and Rose, N. J.. Application of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1876, 31：411—425

[6] Wonham, W. M.. Tracking and Regulation in Linear Multivariable Systems. Univ. Toronto, Ont, Canada, Contr. Syst. Rep. 7202, Mar. 1972

[7] Wonham, W. M.. On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, AC-12：660—665

[8] 王朝珠，戴立意. 广义动态系统. 控制理论与应用，1986，3(1)：2—12

On the Output Regulation of Singular Systems via State Feedback with Bounded Energy

TAN Liansheng

(Wuhan Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica • Wuhan, 430071, PRC)

Abstract: In this paper we have discussed the problem of zeroing the output $y=Dx$ of the singular systems $E\dot{x}=Ax+Bu$ by control of the form $u=Fx$ under a constraint of the type $\int_0^{+\infty} u^T(t)Ru(t)\mathrm{d}t<+\infty$, and have proposed a necessary and sufficient condition for the solvability of this problem.

Key words: singular system; Drazin inverse; output regulation

本文作者简介

谭连生 1966年生. 1988年毕业于福州大学数学系,同年考入中国科学院武汉数学物理研究所,攻读硕士,1991年毕业于该所,获中国科学院系统工程专业硕士学位,留所工作至今. 已在国内外杂志上发表论文近十篇. 目前主要研究兴趣和领域为广义系统的控制理论,大系统理论,多目标决策理论,人工智能与思维科学及生态经济理论与应用.