第 11 卷第 1 期
1994 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 1
Feb., 1994

多滞后线性随机系统的稳定性判据*

冯昭枢　刘永清　郭锋卫
(华南理工大学自动化系·广州,510641)

摘要：本文利用作者建立的时滞随机系统的比较原理和多滞后确定性系统的稳定性结论,建立了多滞后线性随机系统的滞后无关均方渐近稳定性的判据.

关键词：稳定性；时滞系统；随机系统

1 引　言

时滞确定性系统的稳定性问题已得到许多研究成果(如文献[1～4]).其中[1]和[4]提出了无条件稳定性(或称为滞后无关渐近稳定性)的概念,并得到了时滞确定性系统为滞后无关渐近稳定的充要条件.然而,对于带有时滞的随机系统,至今尚未见到有关滞后无关渐近稳定性的概念和结论.

对于由一般随机泛函微分方程描述的时滞随机系统,[5]和[6]分别建立了不同的比较原理,[7]和[8]给出了稳定性判据,但它们均没有讨论滞后无关均方渐近稳定性.本文的目的,就是利用[6]中关于滞后随机系统和[4]中关于多滞后确定性系统的稳定性结论,建立多滞后线性随机系统为滞后无关均方渐近稳定的判据.

2 预备结果

考虑由下面 Ito 随机泛函微分方程描述的时滞随机系统

$$dx(t) = f(t,x_t)dt + \sigma(t,x_t)dz(t), \quad x_{t_0} = \Phi_0. \tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$,$f(t,x_t)$和 $\sigma(t,x_t)$分别是 $n\times 1$ 和 $n\times n$ 矩阵,$f(t,0)\equiv 0,\sigma(t,0)\equiv 0$,对于 $t\geqslant t_0\geqslant 0$,$x_t$ 由 $x_t(s)=x(t+s)$ $(s\in J\triangleq[-r,0])$定义,$z=\{z(t),t\geqslant t_0\}$是定义在完全概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上具有独立分量的 m 维规范化维纳过程,$\Phi_0\in S[C^n]$,这里 $S[C^n]$表示所有 $C^n=C(J,R^n)$值随机变量构成的系.在本文中,对(1)我们假设[6]中的基本假设(H1)～(H3)成立.

我们同时也考虑由下面确定性泛函微分方程描述的时滞确定性辅助系统

$$\dot u(t) = h(t,u(t);u_t), \quad u_{t_0} = \Psi_0. \tag{2}$$

其中 $u_t(t\geqslant t_0)$由 $u_t(s)=u(t+s)$,$s\in J$ 来定义,$\Psi_0\in C(J,R_+)$,$h:R_+\times R_+\times C(J,R)\to R$ 是一个连续映射,$h(t,0,0)=0$.对于 $\Psi\in C(J,R_+)$,它的范数定义为 $\|\Psi\|=\sup_{s\in J}|\Psi(s)|$.

本文所用到的稳定性定义见[7].特别当 $p=2$ 时,称"p 阶均值等度稳定"为"均方等度稳定"或"等度均方稳定",余类推.关于 K 类,VK 类和 CK 类函数的定义见[7].

对于系统(1)和函数 $V:R_+\times R^n\to R_+$,除给出[7]中的假设 A1)和 A2)外,还给出

---

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目.
本文于1991年6月25日收到.1992年6月19日收到修改稿.

A3) 存在 $b(\cdot)\in VK$ 和 $a(\cdot)\in CK$,使对于 $(t,x)\in R_+\times R^n$,有

$$b(|x|^2)\leqslant V(t,x)\leqslant a(|x|^2).$$

由[7]的定理关于 $p=2$ 的结论,直接得到

引理 1　设 A1),A2)和 A3)成立,则有:系统(2)的平衡态 $u(t)\equiv 0$ 的一致渐近稳定性蕴涵系统(1)的平衡态 $x(t)\equiv 0$ 的一致均方渐近稳定性.

考虑由下面常系数线性微分差分方程描述的纯量多滞后确定性系统

$$\dot{u}(t)=-c_0u(t)+c_1u(t-r_1)+\cdots+c_qu(t-r_q).\tag{3}$$

定义 1　如果对于任意非负常数 $r_i(i=1,\cdots,q)$,多滞后确定性系统(3)的平衡态 $u(t)\equiv 0$ 均为渐近稳定的,就称(3)是滞后无关渐近稳定的(也称为无条件稳定或全时滞稳定).

引理 2　系统(3)是滞后无关渐近稳定的,如果 $c_0>0,c_i\geqslant 0(i=1,\cdots,q)$,且 $c_0-\sum_{i=1}^{q}c_i>0$.

证　直接验证[4]中定理 1 的条件即可得到.

容易验证下面的引理 3.

引理 3　对于任意 $y_1,y_2\in R^n,A=(a_{ij})_{n\times n},c>0$,下面的不等式成立

$$-c|y_1|^2+y_1^TAy_2\leqslant -\frac{c}{2}|y_1|^2+\frac{1}{2c}|A|^2|y_2|^2.\tag{4}$$

其中 $|A|$ 是欧氏范数 $|\cdot|$ 诱导的矩阵 A 的范数.

3　主要结果

考虑下面的多滞后线性随机系统

$$dx(t)=[A_0x(t)+\sum_{i=1}^{N}A_ix(t-r_i)]dt+\sum_{j=1}^{m}[F_{0j}x(t)+\sum_{i=1}^{N}F_{ij}x(t-\tau_i)]dz_j(t),\quad x_0=\Phi_0.\tag{5}$$

其中 $A_i(i=0,1,\cdots,N),F_{ij}(j=1,\cdots,m;i=0,1,\cdots,N)$ 均为 $n\times n$ 常矩阵,r_i 和 $\tau_i(i=1,\cdots,N)$ 为位于区间 $[0,r]$ 内的任意常数,$t_0=0,\{z_j(t),t\geqslant 0\}(j=1,\cdots,m)$ 均为纯量标准维纳过程,且相互独立.

定义 2　称多滞后随机系统(5)是滞后无关均方渐近稳定的,如果对任意非负常数 r_i 和 $\tau_i(i=1,\cdots,N)$,(5)的平衡态 $x(t)\equiv 0$ 是均方渐近稳定的.

注记　由于(3)和(5)都是线性时不变的,因此它们的渐近稳定性和均方渐近稳定性分别等价于一致渐近稳定性和一致均方渐近稳定性.

定理 1　多滞后随机系统(5)是滞后无关均方渐近稳定的,如果存在 $n\times n$ 正定对称矩阵 P 和 Q,使得下面的条件得到满足:

i) $A_0^TP+PA_0+\sum_{j=1}^{m}F_{0j}^TPF_{0j}=-Q$;

ii) $a_0-\sum_{i=1}^{N}a_i-\sum_{k=1}^{N}b_k>0$,其中 $a_0,a_i(i=1,\cdots,N)$ 和 $b_k(k=1,\cdots,N)$ 定义如下:

$$a_0=\lambda_m(Q)/[2\lambda_M(P)],\quad a_i=2N|PA_i|^2/[\lambda_m(Q)\lambda_m(P)],\quad i=1,\cdots,N,$$

$$b_k=\lambda_M(D_k)/[\lambda_m(P)],\quad k=1,\cdots,N.$$

这里 $D_k=\sum_{j=1}^{m}F_{kj}^{\mathrm{T}}PF_{kj},k=1,\cdots,N,\lambda_m(\circ)$ 和 $\lambda_M(\circ)$ 分别表示最小和最大特征值.

证 由条件 i)和 ii),对(5)选取 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$ 为李雅普诺夫函数,则有

$$\lambda_m(P)|x|^2\leqslant V(x)\leqslant\lambda_M(P)|x|^2. \tag{6}$$

记 L 为系统(5)确定的微分生成算子(见[6]和[7]). 我们得到

$$\begin{aligned}
LV(x)&=x(t)^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0+\sum_{j=1}^{m}F_{0j}^{\mathrm{T}}PF_{0j})x(t)+\sum_{i=1}^{N}x(t)^{\mathrm{T}}[2PA_ix(t-r_i)]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}x^{\mathrm{T}}(t-\tau_k)(\sum_{j=1}^{m}F_{kj}^{\mathrm{T}}PF_{kj})x(t-\tau_k)\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{N}\{-\frac{1}{N}\lambda_m(Q)|x(t)|^2+x(t)^{\mathrm{T}}[2PA_ix(t-r_i)\}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_M(D_k)|x(t-\tau_k)|^2\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{N}\{-\frac{1}{2N}\lambda_m(Q)|x(t)|^2+\frac{N}{2\lambda_m(Q)}|2PA_i|^2|x(t-r_i)|^2\}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}\lambda_M(D_k)|x(t-\tau_k)|^2\\
&=-\frac{1}{2}\lambda_m(Q)|x(t)|^2+\sum_{i=1}^{N}[\frac{N}{2\lambda_m(Q)}|2PA_i|^2|x(t-r_i)|^2]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}\lambda_M(D_k)|x(t-\tau_k)|^2\\
&\leqslant-a_0V(x(t))+\sum_{i=1}^{N}a_iV(x(t-r_i))+\sum_{k=1}^{N}b_kV(x(t-\tau_k)).
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $a_0,a_i(i=1,\cdots,N),b_k(k=1,\cdots,N)$ 由条件 ii)给出,在上面的推导中应用了引理 3 以及(6).

考虑多滞后确定性辅助系统

$$\dot{u}(t)=-a_0u(t)+\sum_{i=1}^{N}a_iu(t-r_i)+\sum_{k=1}^{N}b_ku(t-\tau_k), \tag{8}$$

利用条件 ii)和引理 2,可知多滞后确定性系统(8)是滞后无关渐近稳定的,即对任意给定的非负常数 $r_i(i=1,\cdots,N)$ 和 $\tau_k(k=1,\cdots,N)$,系统(8)的平衡态 $u(t)\equiv0$ 是渐近稳定的;而对于任意给定的非负常数 $r_i(i=1,\cdots,N)$ 和 $\tau_k(k=1,\cdots,N)$,我们总可以找到一个正常数 r,使 $r_i,\tau_k\in[0,r](i,k=1,\cdots,N)$. 对于(5),易见引理 1 的 A1)~A3)均得到满足. 因此,在 $J\triangleq[-r,0]$ 内应用引理 1,可得到多滞后随机系统(5)的平衡态 $x(t)\equiv0$ 对 $r_i,\tau_k\in[0,r](i,k=1,\cdots,N)$ 是均方渐近稳定的. 而因 r_i 和 τ_k 均为任意选取的非负常数,故多滞后随机系统(5)是滞后无关均方渐近稳定的. 证毕.

例 1 考虑下面的纯量随机系统

$$\mathrm{d}x(t)=[-A_0x(t)+A_1x(t-r_1)+A_2x(t-r_2)]\mathrm{d}t+[F_0x(t)+F_1x(t-\tau_1)]\mathrm{d}z. \tag{9}$$

其中 A_0,A_1,A_2,F_0,F_1 均为纯量常数,$2A_0-F_0^2>0,r_1,r_2$ 和 τ_1 均为非负常数,$z=\{z(t),t\geqslant0\}$ 是纯量标准维纳过程.

对(9)取 $P=1,Q=2A_0-F_0^2$. 此时定理 1 的条件 i)得到满足,而条件 ii)中的 a_i 和 b_i 分

别为 $a_0=\frac{1}{2}Q$，$a_1=\frac{4A_1^2}{Q}$，$a_2=\frac{4A_2^2}{Q}$，$b_1=F_1^2$. 当 $a_0-a_1-a_2-b_1>0$ 时，即当

$$(2A_0^2-F_0^2)^2-8A_1^2-8A_2^2-2F_1^2(2A_0-F_0^2)>0 \tag{10}$$

时，随机系统(9)是滞后无关均方渐近稳定的.

参 考 文 献

[1] 秦元勋，刘永清，王联，郑祖庥. 带有时滞的动力系统的运动稳定性(第二版). 北京：科学出版社，1989

[2] 刘永清，宋中昆. 大型动力系统的理论与应用(卷 1)——分解、稳定与结构. 广州：华南理工大学出版社，1988

[3] 刘永清，徐维鼎. 大型动力系统的理论与应用(卷 2)——建模、镇定与控制. 广州：华南理工大学出版社，1989

[4] Feng Zhaoshu, Liu Yongqing and Zhao Huaizhong. Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Independent Stability of Multidelay Linear Systems. Applied Mathematics and Computation, 1991, 46(1): 23—32

[5] 冯昭枢，刘永清. 随机泛函微分方程稳定性理论中的比较原理. 科学通报，1990，35(14)：1116

[6] 冯昭枢，郭锋卫. 泛函微分不等式与时滞随机系统(I)：比较原理. 常微分方程青年论文专辑. 北京：科学出版社，1991，193—197

[7] 冯昭枢，郭锋卫. 泛函微分不等式与时滞随机系统(Ⅱ)：稳定性判据. 常微分方程青年论文专辑. 北京：科学出版社，1991，198—202

[8] 冯昭枢，刘永清，郭锋卫. 泛函微分不等式与时滞随机系统(IV)：实用稳定性判据. 科学通报，1991，36(20)：1521—1523

[9] 冯昭枢. 随机大系统的稳定性与镇定. 华南理工大学自动化系博士学位论文，广州，1990

A Stability Criterion for Multidelay Linear Stochastic Systems

FENG Zhaoshu, LIU Yongqing and GUO Fengwei

(Department of Automation, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: In this paper, by using the comparison principle of time-delay stochastic systems set up by the authors and the stability results for multidelay deterministic systems, a criterion is established for mean-square asymptotic stability independent of delay of multidelay linear stochastic systems.

Key words: Stability; time-delay system; stochastic system

本文作者简介

冯昭枢　1962 年生. 1990 年在华南理工大学自动化系获博士学位，现在该系任讲师. 目前研究领域是时滞系统，随机系统与大系统的稳定性分析与镇定综合.

刘永清　1930 年生. 华南理工大学教授，博士生导师. 1955 年在复旦大学数学系毕业，1973 年至 1976 年在华南理工大学学习化工仪表自动化第二专业. 目前研究领域是系统工程，大系统理论与应用.

郭锋卫　1966 年生. 1990 年在南京大学数学系获硕士学位，现为华南理工大学自动化系博士生. 目前研究领域是随机系统与随机大系统的稳定性.