第 11 卷第 1 期
1994 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 1
Feb., 1994

广义分散控制系统有穷固定模的判别

高志伟　李光泉　郑丕谔
(天津大学系统工程研究所，300072)

摘要：本文研究了广义分散控制系统有穷固定模的判别问题，给出了一个确定有穷固定模的新算法. 这种算法适用于任意的反馈结构.

关键词：广义系统；分散控制；有穷固定模；有效指标组

1 引　言

随着广义系统研究的进展[1]，广义分散控制系统也逐渐受到人们的重视. 本文集中讨论广义分散控制系统有穷固定模[2]的判定问题. 为了使下面的讨论有意义，我们假定将要讨论的系统是 R-能控且 R-能观的，并假定系统是正则的.

2 预备知识

考虑如下具有 N 个控制站的广义分散控制系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i u_i(t), \\ y_i(t) = C_i x(t), \quad i = 1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x \in \mathrm{R}^n$ 为状态矢量，$u_i \in \mathrm{R}^{m_i}$，$y_i \in \mathrm{R}^{p_i}$ 分别为第 i 个控制站的局部输入和输出矢量. $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$，$E \in \mathrm{R}^{n\times n}$，$\mathrm{rank}E < n$，$B_i \in \mathrm{R}^{n\times m_i}$，$C_i \in \mathrm{R}^{p_i\times n}$. $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$，$p = \sum_{i=1}^{N} p_i$. 记 $B = (B_1, B_2, \cdots, B_N)$，$C^{\mathrm{T}} = (C_1^{\mathrm{T}}, C_2^{\mathrm{T}}, \cdots, C_N^{\mathrm{T}})$. $\overline{K} = \{k \mid k = \text{block diag}(K_1, K_2, \cdots, K_N), K_i \in \mathrm{R}^{m_i\times p_i}, i = 1,2,\cdots,N\}$.

定义 2.1　对于给定的反馈结构 $\overline{K}$，系统(2.1)有穷固定模的集合可表示为

$$\bigcap(E,A,B,C,K) \triangleq \bigcap_{K\in\overline{K}} \sigma(E, A - BKC). \tag{2.2}$$

其中
$$\sigma(R,T) = \{s \mid |sR - T| = 0\}.$$

引理 2.1[4]　若系统(2.1)是 R-能控，且 R-能观的，则对传递函数 $G(s) = C(sE-A)^{-1}B$ 一定存在左既约分解，使 $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$. 其中 $D(s) \in \mathrm{R}^{p\times p}$，$N(s) \in \mathrm{R}^{p\times m}$，且 $|D(s)| = |sE - A|$.

引理 2.2[4]　对系统(2.1)有

$$\det(sE - A + BKC) = \det(sE - A)\det[Ip + G(s)K]. \tag{2.3}$$

由引理 2.1 和 2.2，则有

$$\begin{aligned} \det(sE - A + BKC) &= \det(sE - A)\det[I_p + G(s)K] \\ &= \det D(s)\det[I_p + D^{-1}(s)N(s)K] \\ &= \det[D(s) + N(s)K] \end{aligned}$$

本文于1992年3月29日收到. 1993年8月16日收到修改稿.

$$=\det\left\{[D(s)N(s)]\begin{bmatrix}I_p\\K\end{bmatrix}\right\}=\sum_{h=1}^{t}F_hG_h. \tag{2.4}$$

其中最后一个等式是行列式的 Laplace 展开式，式中 F_h，G_h 分别是$[D(s),N(s)]$，$\begin{bmatrix}I_p\\K\end{bmatrix}$的所有 p 阶子式，$t=C_{m+p}^p$.

设 $X(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i)$表示用 X 中的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 列和 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 行交叉点上的元素构成的矩阵. $X_Y(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i)$表示用 Y 中的 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 列代替 X 中的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 列，而 X 矩阵的其它列保持不变构成的矩阵.

容易看出，F_h 是用 $N(s)$的 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 列代替 $D(s)$的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 列，而 $D(s)$的其它列不变构成的行列式，G_h 是用 K 的 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 行代替 I_p 的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 行，而 I_p 中其它行不变构成的行列式. 因此有

$$G_h=\det K(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i), \tag{2.5}$$

$$F_h=\det D(s)_{N(s)}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i). \tag{2.6}$$

其中 $$0\leqslant i\leqslant p.$$

定义 2.2　对于给定的结构 $\overline{K}$ 和指标组 $\Omega_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i)$，其中 $1\leqslant i\leqslant p$，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$和$(\beta_1,\cdots,\beta_i)$都是$(1,2,\cdots,p)$的子集，且它们中的元素是按由小到大顺序排列的. 如果存在某个 $K\in\overline{K}$，使得 $\det K(\alpha_1,\cdots,\alpha_i;\beta_1,\cdots,\beta_i)\neq 0$，那么 Ω_i 就称为结构 $\overline{K}$ 的一个 i 阶有效指标组，i 阶有效指标组的数量记为 l_i. 特别的，$\Omega_0=\varnothing$(空集)也是有效指标组，且 $l_0=1$.

定义 2.3　对于结构 $\overline{K}$ 的一个 i 阶有效指标组 Ω_i^j，$j=1,2,\cdots,l_i$，$0\leqslant i\leqslant p$，称 $f(\Omega_i^j,s)=\det D(s)_{N(s)}(\alpha_1^j,\cdots,\alpha_i^j;\beta_1^j,\cdots,\beta_i^j)$为有效指标组 Ω_i^j 的一个伴随多项式. 特别的，$\Omega_0=\varnothing$ 时，$f(\Omega_0,s)=\det D(s)$.

根据上面的定义，(2.4)式可以写成

$$\det(sE-A+BKC)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=1}^{l_i}f(\Omega_i^j,s)\det K(\Omega_i^j). \tag{2.7}$$

定理 2.1　设 $s_0\in\sigma(E,A)$，则 s_0 是系统(2.1)关于结构 $\overline{K}$ 的有穷固定模的充要条件是 $f(\Omega_i^j,s)|_{s=s_0}=0$，其中 Ω_i^j 是结构 $\overline{K}$ 的有效指标组，$j=1,\cdots,l_i$；$i=0,\cdots,p$.

根据式(2.7)，利用[3]中定理的证明手段，很容易证明这个定理.

由定理 2.1 知，不为零的伴随多项式对应的 $\overline{K}$ 的指标组中至少有一个是有效指标组，则 s_0 不是系统(2.1)关于结构 $\overline{K}$ 的有穷固定模；否则 s_0 是有穷固定模.

3　主要结论

3.1　使 $f(\Omega,s_0)\neq 0$ 的指标组的求取

定理 3.1.1　$s\in\mathrm{C}$(复平面)，且 $s_0\in\sigma(E,A)$，传递函数的左既约分解为 $G(s)=D^{-1}(s)N(s)$，令 $I=(1,2,\cdots,p)$，$J=(1,2,\cdots,m)$分别为 $D(s_0)\in\mathrm{R}^{p\times p}$和 $N(s_0)\in\mathrm{R}^{p\times m}$下标的集合，并记 $D(s_0)\triangleq D_I(s_0)\triangleq[D_1(s_0),D_2(s_0),\cdots,D_p(s_0)]$，$N(s_0)\triangleq N_J(s_0)\triangleq[N_1(s_0),N_2(s_0),\cdots,N_m(s_0)]$，那么一定能从矩阵 $D_I(s_0)$和 $N_J(s_0)$中找到子阵 $D_{I-I'}(s_0)$和 $N_{J'}(s_0)$，使$[D_{I-I'}(s_0)\ N_{J'}(s_0)]\in\mathrm{R}^{p\times p}$且 $\mathrm{rank}[D_{I-I'}(s_0)\ N_{J'}(s_0)]=p$；即当指标组 $\Omega=(I';J')$时，有 $f(\Omega,s)|_{s=s_0}\neq 0$ 成立. 其中 $I'\subseteq I$，$J'\subseteq J$.

证　因为 $D(s)$ 与 $N(s)$ 左互质，则

$$\operatorname{rank}[D(s)\ N(s)] = p, \tag{3.1.1}$$

则必有

$$\operatorname{rank}[D_I(s_0)\ N_J(s_0)] = p. \tag{3.1.2}$$

所以从 $[D_I(s_0)\ N_J(s_0)] \in R^{p\times(p+m)}$ 中一定能找到子阵 $[D_{I-I'}(s_0)\ N_{J'}(s_0)] \in R^{p\times p}$，使

$$\operatorname{rank}[D_{I-I'}(s_0)\ N_{J'}(s_0)] = p \quad (\text{满秩}). \tag{3.1.3}$$

其中 $I'\subseteq I, J'\subseteq J$.

则有 $$f(\Omega,s)|_{s=s_0} = \det D(s_0)_{N(s_0)}(I';J') = \det[D_{I-I'}(s_0)\ N_{J'}(s_0)] \neq 0$$

成立.

根据定理 3.1.1，便可求出使 $f(\Omega,s_0)\neq 0$ 的指标组的集合.

3.2　有效指标组的判别

对于给定的结构 $\overline{K}$ 和指标组 Ω，如果方阵 $\overline{K}(\Omega)$ 中不存在不能任意选择的零行或零列，则 Ω 就是一个有效指标组，$\overline{K}(\Omega)$ 是非奇异的.

设结构 $\overline{K}$ 的元素的布尔变量为：

$$K_{ij} = \begin{cases} 1, & K_{ij}\ \text{是可以任选的元}, \\ 0, & K_{ij}\ \text{是不可任选的零点}. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

那么有：

定义 3.2.1　对于两个同阶矩阵 A 和 B，如果 A 中某一个元素的布尔变量为 0，则 B 中相应位置上的元素的布尔变量也为 0，则称 B 布尔类似于 A.

定义 3.2.2　对于给定的结构 $\overline{K}$ 和指标组 Ω，如果 $\overline{K}_p(\Omega)$ 中每一行每一列上的元素的布尔变量有且只有一个为 1，则称 $\overline{K}_p(\Omega)$ 是使 $\overline{K}(\Omega)$ 为非奇异的基本结构.

例　$$\overline{K}(\Omega) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

使 $\overline{K}(\Omega)$ 为非奇异的基本结构为 $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$. * 表示布尔变量为 1 的元素.

与 $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$ 布尔类似的矩阵为 $\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix}$ 中只要有一个非奇异，则 $\overline{K}(\Omega)$ 就为非奇异，Ω 就是有效指标组.

显然，使 t 阶方阵 $\overline{K}(\Omega)$ 为非奇异的基本结构为 $t!$ 个，而这 $t!$ 个基本结构相应的布尔类似矩阵中只要有一个非奇异，$\overline{K}(\Omega)$ 就是非奇异的. 我们用多项式 F_i 来表示这些基本结构的布尔类似矩阵

$$F_i = k_{1p_1}k_{2p_2}\cdots k_{tp_t}, \quad i\in\{1,2,\cdots,t!\}. \tag{3.2.2}$$

显然，如果 $k_{1p_1},\cdots,k_{tp_t}$ 全为 1，则多项式 F_i 为 1. 如果这 $t!$ 个多项式 $F_1,\cdots,F_{t!}$ 中只要有一个为 1，则方阵 $\overline{K}(\Omega)$ 为非奇异. 所以，可以用布尔变量 $Q\{\overline{K}(\Omega)\}$ 表示 $\overline{K}(\Omega)$ 的奇异性，即

$$Q\{\overline{K}(\Omega)\} = \sum_{i=1}^{t!} F_i = \sum k_{1p_1}k_{2p_2}\cdots k_{tp_t}. \tag{3.2.3}$$

其中 $$Q\{\overline{K}(\Omega)\} = \begin{cases} 0, & \overline{K}(\Omega)\ \text{奇异} \\ 1, & \overline{K}(\Omega)\ \text{非奇异} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \Omega\ \text{是非有效指标组}, \\ 1, & \Omega\ \text{是有效指标组}. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

3.3 判别有穷固定模的算法

综合 3.1 节和 3.2 节的内容，我们可以给出判别有穷固定模的算法 3.3.

算法 3.3 设 s_0 为系统(2.1)的开环极点，判断 s_0 是否为系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的算法.

步骤 1 求传递函数 $G(s)$的左既约分解，即 $G(s)=D^{-1}(s)N(s)$.

步骤 2 构造矩阵$[D_I(s_0)\ N_J(s_0)]$，根据定理 3.1.1，可求出所有使 $f(\Omega,s)|_{s=s_0}\neq 0$ 的指标组集合 $\Omega=\{(I'_i;\ J'_j)\}$，其中 $i=(1,2,\cdots)$，$j=(1,,2\cdots)$.

步骤 3 把步骤 2 中求得的全部指标组代入(3.2.3)进行计算，若所有指标组都使式(3.2.3)等于 0，则 s_0 是系统(2.1)的有穷固定模；否则 s_0 不是系统(2.1)的有穷固定模.

应当指出的是，定理 2.1 和算法 3.3 中的反馈结构 $\bar{K}$ 并不一定是分块对角阵，故任意反馈结构下的有穷固定模都可用算法 3.3 来判别.

4 结束语

本文得出的结论和算法完全适合正常分散控制系统(取 $E=I$)，同时也可推广到广义分散前馈控制系统.

参 考 文 献

[1] Rosenbrock. Structural Properties of Linear Dynamical Systems. Int. J. Contr., 1974, 20(2):191—202

[2] 王恩平等. 广义分散控制系统的有穷固定模. 自动化学报, 1990, 16(4):358—361

[3] 席裕庚等. 分散固定模的新判据. 上海交通大学学报, 1987, 21(6):8—16

A Criterion for Finite Fixed Modes in Singular Dencentralized Control Systems

GAO Zhiwei, LI Guangquan and ZHENG Pi'e

(Institute of Systems Engineering, Tianjin University • Tianjin, 300072, PRC)

Abstract: In this paper, a criterion for finite fixed modes in singular decentralized control systems is discussed. A new effective algorithm to determine finite fixed modes with arbitrarily constrained feedback structure is submitted.

Key words: singular system; dencentralized control; finite fixed modes; effective index group

本文作者简介

高志伟 1965 年生. 1987 年于天津大学工业自动化专业获工学学士学位；1978 年至 1990 年在天津电传所从事电气传动和自动控制装置的设计和调试工作，1993 年于天津大学系统所获工学硕士学位；目前在该所继续攻读博士学位. 主要研究兴趣是分散控制，过程控制和电气传动.

李光泉 1936 年生. 教授. 博士生导师. 天津大学校长. 主要研究领域是过程控制，控制理论和大系统理论.

郑丕谔 1942 年生. 副教授. 主要研究领域是递阶控制，微分对策和多目标决策.