第 11 卷第 2 期
1994 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 2
Apr., 1994

广义分散控制系统脉冲固定模的代数特征

高志伟 李光泉 郑丕谔
(天津大学系统工程研究所, 300072)

摘要: 本文进一步讨论了分散脉冲固定模的代数特征,得到了若干判别分散脉冲固定模,分散输入,输出脉冲固定模以及分散正常化的充要条件.

关键词: 分散控制; 分散脉冲固定模; 分散正常化

1 引 言

近年来,对于分散脉冲固定模的研究越来越受到人们的重视,并取得了一些成果[1,2]. 本文将在此基础上对分散脉冲固定模问题继续进行讨论. 本文首先讨论了分散脉冲固定模的判别问题,然后提出了分散输入(出)脉冲固定模的概念,并相应地给出了其判别条件. 最后,讨论了分散正常化问题.

2 预备知识

考虑如下正则的广义分散控制系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i u_i(t), \\ y_i(t) = C_i x(t), \quad i \in \underline{N} = \{1, 2, \cdots, N\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^{m_i}, y_i \in \mathbb{R}^{r_i}, \operatorname{rank} E < n, m = \sum_{i=1}^{N} m_i, r = \sum_{i=1}^{N} r_i$, 记 $B \triangleq (B_1 \cdots B_N), C^{\mathrm{T}} \triangleq (C_1^{\mathrm{T}} \cdots C_N^{\mathrm{T}})$.

对系统(2.1)施加反馈 $u = Ky, K \in \overline{K} \triangleq \{K \mid K = \text{block diag}(K_1, K_2, \cdots, K_N), K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times r_i}, i \in \underline{N}$, 且 $\det(sE - A - BKC) \neq 0\}$.

定义 2.1 如果系统(2.1)在无穷远点对于一切 $K \in \overline{K}$ 都有 $\operatorname{rank}[sE - A - BKC] < n$, 则称系统(2.1)具有分散脉冲固定模.

引理 2.1[3]

$$\operatorname{rank}[sT - L]|_{s=\infty} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} T_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

其中

$$U(sT - L) = \begin{pmatrix} sT_1 - L_1 \\ -L_2 \end{pmatrix},$$

T_1 为行满秩, U 为非奇异常数阵.

引理 2.2

$$\operatorname{rank}[sT - L]|_{s=\infty} = \operatorname{rank}[T_2 \ L_4],$$

其中

$$(sT - L)V = (sT_2 - L_3 \quad -L_4),$$

T_2 为列满秩, V 为非奇异常数阵.

引理 2.3[4]

$$\max_K \operatorname{rank}[A + BKC] = \min\left\{\operatorname{rank}(A\ B), \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}\right\}.$$

本文于1992年5月11日收到. 1992年10月27日收到修改稿.

3 主要结论

因为 rank$E<n$,则存在非奇异常数阵 P 和 Q 分别使

$$PE=\begin{bmatrix}E^1\\0\end{bmatrix},\quad PA=\begin{bmatrix}A^1\\A^2\end{bmatrix},\quad PB_i=\begin{bmatrix}B_i^1\\B_i^2\end{bmatrix},\quad PB=\begin{bmatrix}B^1\\B^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1^1&\cdots&B_N^1\\B_1^2&\cdots&B_N^2\end{bmatrix};$$

$$EQ=[E^2\ 0],\quad AQ=[A^3\ A^4],\quad C_iQ=[C_i^1\ C_i^2],\quad CQ=[C^1\ C^2]=\begin{bmatrix}C_1^1&C_1^2\\\vdots&\vdots\\C_N^1&C_N^2\end{bmatrix}.$$

其中 E^1 为行满秩,E^2 为列满秩,且 rankE^1=rankE^2.

3.1 分散脉冲固定模的判别

定理 3.1.1 系统(2.1)具有分散脉冲固定模,当且仅当下列两式中任一式成立:

1) $\max\limits_{K\in\overline{K}}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E^1\\A^2+B^2KC\end{bmatrix}<n$,

2) $\max\limits_{K\in\overline{K}}\operatorname{rank}[E^2\ A^4+BKC^2]<n$.

证 根据引理 2.1 和定义 2.1,则有

$$\max_{K\in\overline{K}}\operatorname{rank}[sE-A-BKC]|_{s=\infty}=\max_{K\in\overline{K}}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE^1-A^1-B^1KC\\-A^2-B^2KC\end{bmatrix}\Bigg|_{s=\infty}$$

$$=\max_{K\in\overline{K}}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E^1\\A^2+B^2KC\end{bmatrix}<n.$$

由定义 2.1 和引理 2.2,可类似证明定理 3.1.1 中的 2).

为了下面叙述方便,我们设 $\underline{N}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的某种不相交分划为:$P=\{i_1,\cdots,i_k\}$,$\overline{P}\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$,并设

$$B_P=[B_{ik+1},\cdots,B_{iN}],\quad B_{\overline{P}}^2=[B_{ik+1}^2,\cdots,B_{iN}^2],$$

$$B_{\overline{P}}^1=[B_{ik+1}^1,\cdots,B_{iN}^1],\quad \overline{B}_{\overline{P}}^2=[\overline{B}_{ik+1}^2,\cdots,\overline{B}_{iN}^2],$$

$$C_P=\begin{bmatrix}C_{i1}\\\vdots\\C_{ik}\end{bmatrix},\quad C_P^2=\begin{bmatrix}C_{i1}^2\\\vdots\\C_{ik}^2\end{bmatrix},\quad C_P^1=\begin{bmatrix}C_{i1}^1\\\vdots\\C_{ik}^1\end{bmatrix},\quad \overline{C}_P^2=\begin{bmatrix}\overline{C}_{i1}^2\\\vdots\\\overline{C}_{ik}^2\end{bmatrix}.$$

定理 3.1.2 系统(2.1)具有分散脉冲固定模,当且仅当存在 $\underline{N}$ 的某种不相交分划 P 和 $\overline{P}$,使下面两式中任意一式成立:

1) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E^1&0\\A^2&B_{\overline{P}}^2\\C_P&0\end{bmatrix}<n$,

2) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E^2&A^4&B_{\overline{P}}^2\\0&C_P^2&0\end{bmatrix}<n$.

由定理3.1.1 和引理 2.3,运用文[4]中的定理证明手段即可得证.

3.2 分散输入、输出脉冲固定模

定义 3.2.1 如果系统(2.1)在无穷远点有$\max\limits_{K\in\overline{K}}\operatorname{rank}[sE-A-BKC\ B_i]<n$,则称系统(2.1)具有关于第 i 个控制站的分散输入脉冲固定模,并记它的集合为 $\Lambda_C^{(i)}$.

定义 3.2.2　如果系统(2.1)在无穷远点有 $\max\limits_{K\in\overline{K}} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A-BKC \\ C_i \end{bmatrix}<n$，则称系统(2.1)具有关于第 i 个控制站的分散输出脉冲固定模，并记它的集合为 $\Lambda_{\overline{O}}^{(i)}$.

定理 3.2.1　系统(2.1)具有关于第 i 个控制站的分散输入脉冲固定模，当且仅当下面两式中任一式成立：

1) $\max\limits_{K\in\overline{K}} \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^1 & 0 \\ A^2+B^2KC & B_i^2 \end{bmatrix}<n$,

2) $\max\limits_{K\in\overline{K}} \operatorname{rank}[E^2\ \ A^4+BKC^2\ \ B_i]<n$.

根据定义 3.2.1.利用定理 3.1.1 的证明手段易证.

定理 3.2.2　系统(2.1)具有关于第 i 个控制站的分散输入脉冲固定模，当且仅当存在 $\underline{N}$ 的某种不相交分划 P 和 $\overline{P}$，使下两式中任一式成立：

1) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^1 & 0 & 0 \\ A^2 & B_i^2 & B_{\overline{P}}^2 \\ C_P & 0 & 0 \end{bmatrix}<n$,

2) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^2 & A^4 & B_i & B_{\overline{P}}^2 \\ 0 & C_P^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}<n$.

根据定理3.2.1.和引理2.3，采用文[4]中定理证明手段不难得证.

对偶地，我们也可以得到分散输出脉冲固定模的判别条件，但限于篇幅，这里省略.

定义 3.2.3　如果 $\Lambda_{\overline{C}}^{(i)}=\varnothing$(空集)，则称系统(2.1)关于第 i 个控制站分散脉冲可控；$\Lambda_{\overline{O}}^{(i)}=\varnothing$，则称系统(2.1)关于第 i 个控制站分散脉冲可观.

定理 3.2.3　如果记系统(2.1)分散脉冲固定模的集合为 Λ，那么有 $\Lambda=\Lambda_{\overline{C}}^{(i)}\cup\Lambda_{\overline{O}}^{(i)}$，$(\forall\ i\in\underline{N})$.

由定义 3.2.1 和定义 3.2.2 显然得证.

定理 3.2.4　系统(2.1)没有分散脉冲固定模的充要条件是系统(2.1)关于第 i 个控制站分散脉冲可控且分散脉冲可观.

由定义 3.2.3 和定理 3.2.3 易证.

3.3　广义分散系统的分散正常化

引理 3.3.1[1]　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当存在

$$K\in\overline{K}=\{K\,|\,K=\text{block diag}(K_1,\cdots,K_N),K_i\in\mathbb{R}^{m_i\times r_i},i\in\underline{N}\},$$

对系统(2.1)施加反馈 $u=-K\hat{y}$，使闭环系统 $(E+BKC)\dot{x}=Ax$ 且 $\det(E+BKC)\neq0$.

定理 3.3.1　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当对集合 $\underline{N}$ 的一切不相交分划 P 和 $\overline{P}$，能使下面三式中任一式成立.

1) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & B_{\overline{P}} \\ C_P & 0 \end{bmatrix}\geqslant n$,

2) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^1 & B_{\overline{P}}^1 \\ 0 & B_{\overline{P}}^2 \\ C_P & 0 \end{bmatrix}\geqslant n$,

3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^2 & 0 & B_{\overline{P}} \\ C_P^1 & C_P^2 & 0 \end{bmatrix}\geqslant n$.

由引理3.3.1，利用文[4]中定理证明手段易证.

引理 3.3.2[1]　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当正常系统(C,E,B)不以零为分散固定模.

定理 3.3.2　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当存在$K\in\overline{K}$，使K^T中非奇异子反馈阵所对应的正常系统(C,E,B)的子系统至少有一个不以零为传递零点.

由引理 3.3.2 和文[5]中的定理直接可证.

把系统(2.1)简记为(E,C,A,B)，则系统(2.1)可受限等价为

$$\left\{\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [\overline{C}^1\ \overline{C}^2], \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{B}^1 \\ \overline{B}^2 \end{bmatrix}\right\}. \tag{3.3.1}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \overline{B}^1 \\ \overline{B}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1^1 & \cdots & \overline{B}_N^1 \\ \overline{B}_1^2 & \cdots & \overline{B}_N^2 \end{bmatrix}, \quad [\overline{C}^1\ \overline{C}^2] = \begin{bmatrix} \overline{C}_1^1 & \overline{C}_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{C}_N^1 & \overline{C}_N^2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}E = q.$$

定理 3.3.3　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当存在$K\in\overline{K}$，使$\mathrm{rank}[\overline{A}+\overline{B}K\overline{C}]=n-q$成立.

其中
$$\overline{A}=\left\{\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad \overline{B}=\left\{\begin{bmatrix} \overline{B}^1 \\ \overline{B}^2 \end{bmatrix}\right\}, \quad \overline{C}=[\overline{C}^1\ \overline{C}^2].$$

证　由引理3.3.1和式(3.3.1)有

$$\mathrm{rank}[E+BKC]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_q+\overline{B}^1K\overline{C}^1 & \overline{B}^1K\overline{C}^2 \\ \overline{B}^2K\overline{C}^1 & \overline{B}^2K\overline{C}^2 \end{bmatrix}=n.$$

即
$$\mathrm{rank}[\overline{A}+\overline{B}K\overline{C}]=n.$$

定理 3.3.4　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当对集合$\underline{N}$的一切不相交分划P和$\overline{P}$，都有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B}_{\overline{P}} \\ \overline{C}_P & 0 \end{bmatrix}\geqslant n.$$

由定理 3.3.3，利用文[4]中定理证明手段易证.

定理 3.3.5　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当正常系统$(\overline{C},\overline{A},\overline{B})$不以零为分散固定模.

由定理 3.3.3 显然可证.

定理 3.3.6　系统(2.1)能分散正常化，当且仅当存在$K\in\overline{K}$，使K^T中非奇异子反馈阵所对应的正常系统$(\overline{C},\overline{A},\overline{B})$的子系统至少有一个不以零为传递零点.

由定理 3.3.5 和文[5]中的定理，显然可证.

4　结束语

本文讨论了分散脉冲固定模的代数特征，得出了一些有意义的结论. 对于如何通过增加反馈信息通道消除分散脉冲固定模. 作者将有另文再述.

参 考 文 献

[1] 王朝珠，王恩平. 广义分散控制系统的无穷远固定模. 系统科学与数学，1988，8(2)：142—150
[2] Chang, T. N. and Davison, E. J.. Decentralized Control for Descriptor Type Systems. Proc. of the 25th CDC, 1986, 1176—1181
[3] Verghese, G., Dooren, P. V. and Kailath, T.. Properties of the System Matrix of a Generalized State-Space Systems. Int. J. Ctr., 1979, 30(2):235—243
[4] 谢绪恺，荆海英. 分散控制系统的固定模式. 自动化学报，1986，12(2)：185—189
[5] Tarokh, M.. Fixed Modes in Multivariable Systems Using Constrained Controllers. Automatica, 1985, 21(4):495—497

Algebraic Properties of Decentralized Impulsive Fixed Modes

GAO Zhiwei, LI Guangquan and ZHENG Pi'e
(Institute of Systems Engineering, Tianjin University · Tianjin, 300072, PRC)

Abstract: In this paper, the problems of the decentralized impulsive fixed modes are further studied. The new definition of the decentralized impulsive fixed modes is proposed. Some new significant conclusions are obtained.

Key words: decentralized control; decentralized impulsive fixed mode; decentralized regularizability

本文作者简介

高志伟 见本刊 1994 年第 1 期第 23 页.
李光泉 见本刊 1994 年第 1 期第 23 页.
郑丕谔 见本刊 1994 年第 1 期第 23 页.