第 11 卷第 3 期
1994 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 3
Jun., 1994

多步反馈控制作用下的离散事件动态系统的周期计算*

唐乾玉　陈翰馥
(中国科学院系统科学研究所·北京，100080)

摘要：我们考察极大代数意义下的线性离散事件动态系统(DEDS). 在多步反馈控制作用下，熟知求系统运行的周期就是要求有 rl 个顶点的图的关键回路. 本文重构一个只有 r 个顶点的有向赋权图 $G(F)$，证明求系统的周期等价于求 $G(F)$ 的关键回路，从而将一个求 rl 个顶点的图的关键回路问题简化为求一个只有 r 个顶点的图的关键回路问题.

关键词：离散事件动态系统；极大代数；关键回路；周期；多步反馈控制

1　问题的叙述

考察 p 种工件在 m 台机器上的重复加工过程，加工路径事先给定，在每台机器上工件加工的先后次序已知，机器 i 加工工件 j 的时间记为 t_{ij}，矩阵 $T=(t_{ij})_{m\times p}$ 是常数阵. 文献[1,2]将这类无决策、确定性的 DEDS 用下述线性方程来描述(在极大代数意义下)：

$$\begin{cases} x(n) = Ax(n) \oplus Bu(n), \\ y(n) = Cx(n). \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x(n)$，$u(n)$，$y(n)$ 分别为 mp 维、$m+p$ 维、$m+p$ 维向量，分别表示第 n 次 mp 个事件开始的时间、$m+p$ 个资源的可利用时间及释放时间. A,B,C 是适当维数的矩阵，由加工时间矩阵 T 及各机器前工件的排序方法所决定，这里 $\oplus$ 及 $\cdot$ 运算分别对应于通常意义下的取最大运算和加运算.

我们考察如下形式的多步反馈控制：

$$u(n) = H_1y(n-1) \oplus H_2y(n-2) \oplus \cdots \oplus H_ly(n-l). \tag{1.2}$$

其中 $l\geqslant 2$ 是某个常数，H_i 中对角线元素无 ε 元($\varepsilon=-\infty$)，$1\leqslant i\leqslant l$.

在多步反馈控制(1.2)作用下，系统(1.1)等价于递推方程 $z(n)=Mz(n-1)$(见(2.2)式)，其中 M 是 $rl\times rl$ 矩阵，由后面的讨论可知系统的运行仍是周期的. 熟知，求系统运行的周期就是要求 $G(M)$(把 M 当成邻接矩阵时产生的图)的关键回路. 由于 M 的阶数较大，分析图 $G(M)$ 关键回路复杂，特别当 $G(M)$ 有很多关键回路时尤为复杂，所以，如何简化系统周期的计算，是十分有意义的问题. 当 $G(M)$ 只有一个关键回路时，文献[4]给出一个计算系统周期 λ^d 的有效算法，这里 λ 是 M 在极大代数意义下的特征值，d 是 $G(M)$ 关键回路的长度. 然而，当 $G(M)$ 有多个关键回路时，目前尚无好的算法. 文献[5]给出 λ 的一个估计式. 本文根据 l 个 $r\times r$ 矩阵，最多用 $O(l\cdot r^2)$ 次运算，重新构造出一个只有 r 个顶点的多重有向图 $G(F)$，给出了重构算法，证明求系统运行的周期等价于求 $G(F)$ 的关键

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1992年11月30日收到. 1993年12月20日收到修改稿.

回路，由于 $G(F)$ 只有 r 个顶点，从而使计算大为简化.

2 多重图的重构

将控制律(1.2)代入(1.1)，经过有限步迭代即得

$$y(n)=CA^*BH_1y(n-1)\oplus\cdots\oplus CA^*BH_ly(n-l). \tag{2.1}$$

其中 $A^*=E\oplus A\oplus\cdots\oplus A^{mp-1}$. 记

$$M_0=CA^*B,\quad M_i=M_0H_i,\quad 1\leqslant i\leqslant l,$$

$$z(n)=[y^{\tau}(n),y^{\tau}(n-1),\cdots,y^{\tau}(n-l+1)]^{\tau},$$

则(2.1)可写成

$$z(n)=Mz(n-1). \tag{2.2}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_{l-1} & M_l \\ E_r & & & \vdots & \\ & E_r & & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & E_r & \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

这里 E_r 是单位阵，单位元 $e=0$.

由后面的引理1可知 M 是不可约的，因而系统(2.2)是周期的[1~3]. 记 M 的特征值是 λ，则存在充分大的 n_0，使

$$z(n+d)=\lambda^d z(n),\quad n\geqslant n_0. \tag{2.4}$$

其中 d 是某个正整数，它是 $G(M)$ 关键回路的长度(有可能是多个关键回路长度的公倍数). 由于 $G(M_1)\subseteq G(M)$，显然 $\lambda\geqslant G(M_1)$ 的最大平均回路权 λ_1，即 M_1 的特征值.

下面，我们根据矩阵 $M_1,M_2,\cdots,M_l$，重构一个只有 r 个顶点的多重赋权图 $G(F)$，使求 M 的周期与计算 $G(F)$ 的关键回路等价. 以后如不特别声明，运算符号与通常的运算符号意义相同. 记

$$M=(m_{ij})_{rl\times rl},\quad M_k=(m_{ij}(k))_{r\times r},\quad 0\leqslant k\leqslant l.$$

重构算法：

i) 图 $G(F)$ 的自回路.

若对顶点 i，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant l}\dfrac{m_{ij}(k)}{k}<\lambda_1$，则令 $f_{ii}=\varepsilon$. 反之，则令 $f_{ii}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant l}\dfrac{m_{ii}(k)}{k}$. 记 $\{k\mid\dfrac{m_{ij}(k)}{k}=f_{ii},1\leqslant k\leqslant l\}=\{n_{ii}(1),\cdots,n_{ii}(p_{ii})\}$，用 $(f_{ii};n_{ii}(1),\cdots,n_{ii}(p_{ii}))$ 表示顶点 i 处的多重自回路权，其含义是：从顶点 i 处出发，有 p_{ii} 个平均权为 f_{ii} 的回路，长度分别为 $n_{ii}(k)$，$1\leqslant k\leqslant p_{ii}$，这里回路的特点是不经过 $G(F)$ 的其它顶点.

ii) 图 $G(F)$ 中从顶点 i 到 j 的有向弧.

若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant l}m_{ij}(k)=\varepsilon$，则令 $f_{ij}=\varepsilon$. 下面分两种情况继续讨论.

1) 若 $m_{ij}(1)=\varepsilon$，但 $\max\limits_{2\leqslant k\leqslant l}m_{ij}(k)>\varepsilon$. 记 $\{k\mid m_{ij}(1)>\varepsilon,2\leqslant k\leqslant l\}=\{n_{ij}(1),\cdots,n_{ij}(p_{ij})\}$，显然 $p_{ij}\leqslant l-1$. 记 $f_{ij}(k)=m_{ij}(n_{ij}(k))$，$1\leqslant k\leqslant p_{ij}$. 用 $(f_{ij}(1);n_{ij}(1),\cdots,f_{ij}(p_{ij}),n_{ij}(p_{ij}))$ 表示 $G(F)$ 中有向弧 (i,j) 的多重权，含义是：从顶点 i 到 j 有 p_{ij} 条路径，其中第 k 条路径的长度及赋权和分别是 $n_{ij}(k)$，$f_{ij}(k)$，$1\leqslant k\leqslant p_{ij}$.

2) 设 $m_{ij}(1)>\varepsilon$. 若 $\max\limits_{2\leqslant k\leqslant l}\dfrac{m_{ij}(k)-m_{ij}(1)}{k-1}<\lambda_1$，则令 $f_{ij}=m_{ij}(1)$，用 f_{ij} 表示 (i,j) 的权. 反

之，则有$\max\limits_{2\leqslant k\leqslant l}\frac{m_{ij}(k)-m_{ij}(1)}{k-1}\geqslant\lambda_1$. 记集合

$$\alpha\triangleq\left\{k\left|\frac{m_{ij}(k)-m_{ij}(1)}{k-1}\geqslant\lambda_1,\quad 2\geqslant k\geqslant l\right.\right\}=\{\bar{n}_{ij}(1),\cdots,\bar{n}_{ij}(\bar{p}_{ij})\}.$$

a) $\forall\ k_1,k_2\in\alpha,k_1>k_2$，若

$$\frac{m_{ij}(k_1)-m_{ij}(1)}{k_1-1}>\frac{m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1)}{k_2-1},\tag{2.5}$$

则将k_2从集合α中剔除.

b) $\forall\ k_1,k_2\in\alpha$，若$k_1<k_2$，且$m_{ij}(k_1)\geqslant m_{ij}(k_2)$，则将$k_2$从$\alpha$中剔除.

经过a),b)步骤后，记α中剩下的元素为$\beta\triangleq\{n_{ij}(1),n_{ij}(2),\cdots,n_{ij}(p_{ij})\}$. 令$f_{ij}(k)=m_{ij}(n_{ij}(k))$，$1\leqslant k\leqslant p_{ij}$，我们用数组对

$$(m_{ij}(1),1;f_{ij}(1),n_{ij}(1);\cdots;f_{ij}(p_{ij}),n_{ij}(p_{ij}))$$

来表示$G(F)$中弧(i,j)的多重权，含义同(1).

3 主要定理及证明

我们先给出图$G(M)$的一些性质，证明从略.

引理1 1) $\forall\ 1\leqslant k\leqslant l-1$，从顶点$kr+i$起始存在唯一条经过顶点$(k-1)r+i$，$(k-2)r+i,\cdots,r+i,i$的路径，即路径$kr+i,(k-1)r+i,\cdots,r+i,i$，其长度为$k$，每一段弧的权为单位元$e$.

2) $\forall\ i_0\in[1,r],k\in[0,l-1]$，存在$i_1\in[1,r],i_1\neq i_0$，使$(i_1,kr+i_0)$是$G(M)$的有向弧.

3) 图$G(M)$是强连通的.

4) 不存在从顶点k_1r+i_1到k_2r+i_2的有向弧，其中$1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant l-1,i_1,i_2\in[1,r]$.

设r是$G(M)$任意一回路，用记号$L(\gamma)$表示γ的长度，用$w(\gamma),\bar{w}(\gamma)$分别表示$\gamma$的权重和及平均权重. 在叙述定理之前，要证两个引理.

引理2 记γ_0是$G(M)$的一个关键回路，若对某个$k\geqslant 2$，

$$\frac{m_{ij}(k)-m_{ij}(1)}{k-1}<\lambda_1,$$

则路径$i,(k-1)r+j,\cdots,r+j,h$不可能包含在γ_0中.

证 若不然，设γ_0包含了这段路径，那么

$$\lambda=\frac{w(\gamma_0)}{L(\gamma_0)}=\frac{1}{L(\gamma_0)}\{[w(\gamma_0)-m_{ij}(k)+m_{ij}(1)]+[m_{ij}(k)-m_{ij}(1)]\},$$

由此则知 $$\frac{w(\gamma_0)-m_{ij}(k)+m_{ij}(1)}{L(\gamma_0)-k+1}-\lambda=\frac{k-1}{L(\gamma_0)-k+1}\left\{\lambda-\frac{m_{ij}(k)-m_{ij}(1)}{k-1}\right\}$$
$$>\frac{k-1}{L(\gamma_0)-k+1}\{\lambda-\lambda_1\}\geqslant 0.$$

从而得到如下结论：把γ_0中的路径$i,(k-1)r+j,\cdots,r+j,j$去掉，而以弧(i,j)代替，会得到一个平均权比λ更大的回路，从而矛盾.

引理3 设$m_{ij}(1)>\varepsilon$，且存在k_1,k_2，使

i) $k_1>k_2$，并满足

$$\frac{m_{ij}(k_1)-m_{ij}(1)}{k_1-1}>\frac{m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1)}{k_2-1}\geqslant\lambda_1,\tag{3.1}$$

或者 ii) $k_1<k_2$，但 $m_{ij}(k_1)\geqslant m_{ij}(k_2)$，那么路径 $i,(k_2-1)r+j,\cdots,r+j,j$ 不可能包含在$G(M)$的关键回路中.

证　i) 设 $G(M)$中回路 γ^1 包含了有向弧(i,j). 将 γ^1 中弧(i,j)去掉，而用路径 $i,(k_1-1)r+j,\cdots,r+j,j$ 及路径 $i,(k_2-1)r+j,\cdots,r+j,j$ 代替所得到的回路分别记为 γ_1,γ_2. 若

$$\frac{w(\gamma^1)-m_{ij}(1)+m_{ij}(k_2)}{L(\gamma^1)+k_2-1}<\frac{w(\gamma^1)}{L(\gamma^1)}, \tag{3.2}$$

那么，γ_2 的平均权 $\overline{w}(\gamma_2)<\overline{w}(\gamma_1)$，所以，路径 $i,(k_2-1)r+j,\cdots,r+j,j$ 不可能包含在$G(M)$的关键回路中.

相反地，若
$$\frac{w(\gamma^1)-m_{ij}(1)+m_{ij}(k_2)}{L(\gamma^1)+k_2-1}\geqslant\frac{w(\gamma^1)}{L(\gamma^1)}, \tag{3.3}$$

则易知(3.3)式与下式等价

$$\frac{m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1)}{k_2-1}\geqslant\frac{w(\gamma^1)}{L(\gamma^1)}. \tag{3.4}$$

由(3.1)及(3.4)式不难得到：

$$\begin{aligned}\frac{m_{ij}(k_1)-m_{ij}(k_2)}{k_1-k_2}&=\frac{1}{k_1-k_2}\{[m_{ij}(k_1)-m_{ij}(1)]-[m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1)]\}\\&>\frac{1}{k_1-k_2}\left\{\frac{k_1-1}{k_2-1}-1\right\}[m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1)]\\&=\frac{1}{k_2-1}(m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1))\geqslant\frac{w(\gamma^1)}{L(\gamma^1)}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由(3.1)及(3.5)式则得

$$\begin{aligned}&L(\gamma^1)[m_{ij}(k_1)-m_{ij}(1)]+(k_2-1)w(\gamma^1)+(k_2-1)[m_{ij}(k_1)-m_{ij}(1)]\\&>L(\gamma^1)[m_{ij}(k_2)-m_{ij}(1)]+(k_1-1)w(\gamma^1)+(k_1-1)[m_{ij}(k\end{aligned}$$

$$\frac{)-m_{ij}(1)}{L(\gamma^1)+k_2-1}, \tag{3.6}$$

即 $\overline{w}(\gamma_1)>\overline{w}(\gamma_2)$. 由此知 γ_2 不可能是 $G(M)$的关键回路. 由于 γ^1 的任意性，即知命题成立.

ii) 证明是显然的.

定理　由重构算法生成的图 $G(F)$的关键回路平均权、关键回路的个数和长度分别与 $G(M)$中关键回路平均权、关键回路个数和长度相同.

证　设 γ_0 是 $G(M)$的关键回路，且只含一个回路. 往证 $G(F)$中必有长度是 $L(\gamma_0)$、平均权为 $\lambda\triangleq\overline{w}(\gamma_0)$的回路.

1) 若 γ_0 是 $G(M)$中顶点 i_0 处的自回路，由重构规则 i)可知，$G(F)$中顶点 i_0 处有自回路权，包含了数组对$(\lambda,1)$.

2) 若 γ_0 是回路 $i_0,(k-1)r+i_0,\cdots,r+i_0,i_0$，其中 $k\geqslant 2,i_0\in[1,r]$，此时 $G(F)$中顶点 i_0 处有自回路，自回路权中包含了数组对(λ,k).

3) 设 γ_0 至少包含有不同的两顶点 $i^{(1)},i^{(2)}\in[1,r]$. 不妨设 γ_0 至少有一段路径不包含在 $G(F)$中，这段路径是 $i_2,(k_2-1)r+i_1,\cdots,i_1$，其中 $k_2\in[2,r]$，$i_1,i_2\in[1,r]$. 利用引理 2 和引理 3，由重构算法 ii)可知，顶点 i_2 到 i_1 的多重权中必有数组对$(m_{i_2i_1}(k_2),k_2)$.

由于 $\lambda\geqslant G(F)$的关键回路平均权 $G(M)$中关键回路个数不少于 $G(F)$中平均权为 λ

的回路个数，从而定理成立．

参考文献

[1] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J. P. and Viot, M.. A Linear-System-Theoretic View of Discrete-Event Processes and Its Use for Performance Evaluation in Manufacturing. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(3):210—220

[2] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J. P. and Viot, M.. A Linear-System-Theoretic View of Discrete-Event Processes. Proc. of the 22nd Conf. on Decision and Control, 1983, 1039—1044

[3] Olsder, G. et al.. Discrete Event Systems with Stochastic Processing Times. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(3):299—302

[4] Karp, R. M.. A Characterization of the Minimum Cycle Mean in a Digraph. Discrete Mathematics. 1978, 23:309—311

[5] 王龙，郑大钟．线性离散事件动态系统在广义反馈律下的动态特性分析．控制理论与应用，1989，6(2)：299—302

[6] 王龙，郑大钟．参数摄动时一类离散事件动态系统的渐近性能估计和鲁棒条件．控制理论与应用，1989，6(3)：47—55

[7] Graves, S. et al.. Scheduling of RE-Entrant Flow Shops. J. of Operations Management, 1983, 3:197—207

[8] Lu, S. H. and Kumar, P. R.. Distributed Scheduling Based on due Dates and Buffer Priorities. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36:1406—1416

Computation of Period for Discrete Event Dynamic Systems with Multi-State Feedback Control

TANG Qianyu and CHEN Hanfu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica · Beijing, 100080, PRC)

Abstract: We consider the linear (in the sense of Max-algebra) discrete event dynamic systems with multi-stage feedback control. It is well-known that in order to find the period of the system we need to seek for the critical circuits of a diagraph with rl vertices. In this paper, we reconstruct a weighted multigraph $G(F)$ with r vertices and show that the period of the system can be obtained from the critical circuits of $G(F)$. Thus, the problem of seeking for critical circuits of a diagraph with lr vertices is simplified to the one with r vertices.

Key words: discrete event dynamic systems; max-algebra; critical circuit; perid; multi-stage feedback control laws

本文作者简介

唐乾玉 1963年生．1987年毕业于国防科技大学，1990年和1993年在中国科学院系统科学研究所分别获得硕士和博士学位．现在清华大学自动化系做博士后研究工作．主要研究兴趣为自适应控制，DEDS理论及应用，随机优化，制造系统的调度和控制，DSS的Petri网模型等．

陈翰馥 1937年生．中国科学院院士．1961年毕业于前苏联列宁格勒大学数学系，然后工作于中国科学院数学研究所和系统科学研究所．曾在随机系统，过程统计方面发表论文一百余篇，近半数在国外刊物上发表．发表专著5本，其中两本在美国出版．现任IFAC技术局成员，负责系统和信号协调委员会；中国自动化学会理事长；中国数学会常务理事．研究领域为随机系统的辨识与控制，适应控制，递推估计及随机逼近等．