第 11 卷第 3 期
1994 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 3
Jun., 1994

鲁棒容错控制系统设计*

孙金生　李　军　冯缵刚　　　　胡寿松
（南京理工大学自动控制系，210014）　（南京航空航天大学自动控制系，210016）

摘要：本文考虑了观测器状态反馈控制系统的容错控制问题，提出了一种对传感器失效具有完整性的控制器设计方法，进而讨论了存在参数摄动的情况，给出了鲁棒容错控制器的设计步骤并用设计实例及仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词：容错控制；鲁棒性；传感器失效

1　问题的提出

系统的完整性是指系统中一个或多个部件发生故障时，系统利用余下的部件仍可稳定工作的特性. 近年来，有关完整性的文献很多[1~4]，但多采用状态反馈方法，而实际系统的状态往往不易完全测得，因此，本文考虑了对传感器失效具有完整性的基于观测器状态反馈的鲁棒容错控制系统设计方法.

考虑完全可控、可测的线性多变量系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t). \tag{1}$$

其中 $x(t)$ 为 n 维状态变量，$u(t)$ 为 m 维控制变量，$y(t)$ 为 r 维输出变量；A, B, C 为维数适当的矩阵. 若取反馈控制律为

$$u(t) = -Kz(t). \tag{2}$$

其中 $K \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 为状态反馈增益阵，$z(t)$ 是用如下 Kalman 观测器重构的系统状态，即

$$\dot{z}(t) = (A - LC)z(t) + Bu(t) + Ly(t). \tag{3}$$

其中 $L \in \mathrm{R}^{n\times r}$ 为观测器增益阵. 则闭环组合系统为

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t). \tag{4}$$

其中

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}.$$

系统中传感器用来测量系统输出并反馈给状态观测器. 为了表示传感器的可能失效，我们引入切换阵 F，其形式为

$$F = \mathrm{diag}(f_1, f_2, \cdots, f_r). \tag{5}$$

其中

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个传感器正常}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个传感器失效}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1993年1月6日收到. 1993年12月15日收到修改稿.

系统的结构如图 1 所示.

若用 Ω 表示对角元素为 1 和 0 的各种组合的对角阵 F 的集合，则系统的完整性可叙述如下：寻求状态反馈增益阵 K 和观测器增益阵 L，使闭环组合系统

$$\dot{x}_c(t) = (A_c + \delta A)x_c(t) \tag{6}$$

对所有 $F \in \Omega$ 均保持渐近稳定，其中

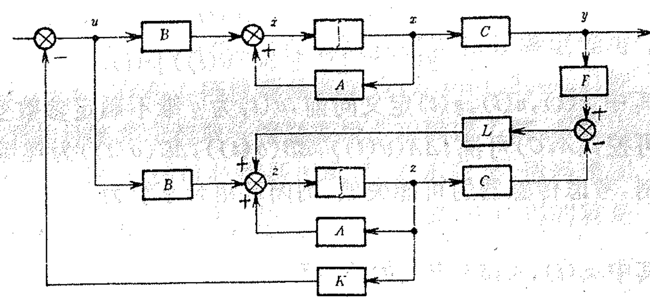

图 1　观测器状态反馈控制系统结构图

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L(I-F)C & 0 \end{bmatrix}.$$

2　系统对传感器失效具有完整性的条件

对系统(1)，必存在 K, L 使传感器完好时的闭环系统稳定，传感器失效时，有如下定理：

定理 1　对完全可控、可测的多变量系统(1)，若采用观测器状态反馈控制律(2)，则闭环组合系统对传感器失效具有完整性的条件为：

$$\beta \leqslant \frac{1}{2\lambda_M(P)}. \tag{7}$$

其中 $\lambda_M(P)$ 为求最大特征值运算，而

$$\beta = \max_{F\in\Omega}(\| L(I-F)C \|_s). \tag{8}$$

其中 $\|\cdot\|_s$ 为矩阵的谱范数，P 为 Lyapunov 方程

$$A_c^{\mathrm{T}}P + PA_c + I = 0 \tag{9}$$

的对称正定解.

证　取 Lyapunov 函数

$$V(x_c) = x_c^{\mathrm{T}}Px_c. \tag{10}$$

其中 P 是(9)式的对称正定解. 有传感器失效时状态方程为(6)式，将(10)式求导可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_c) &= \dot{x}_c^{\mathrm{T}}Px_c + x_c^{\mathrm{T}}P\dot{x}_c \\
&= -x_c^{\mathrm{T}}x_c + 2x_c^{\mathrm{T}}P\delta Ax_c \\
&\leqslant -x_c^{\mathrm{T}}x_c + 2\| x_c^{\mathrm{T}}P\delta Ax_c \| \\
&\leqslant -x_c^{\mathrm{T}}x_c + 2\| P\|_s \|\delta A\|_s \|x_c\|^2 \\
&\leqslant -x_c^{\mathrm{T}}x_c + \|x_c\|^2 \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

由 Lyapunov 稳定性定理可知，此时系统是渐近稳定的，因此系统对传感器失效具有完整性.

3　鲁棒容错控制系统设计

实际系统的不确定性是不可避免的，它会影响系统性能，甚至导致系统不稳定. 基于上节的结果，本节讨论鲁棒容错控制系统的设计方法.

考虑存在参数摄动的线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=[A+\Delta A(\sigma(t))]x(t)+[B+\Delta B(\sigma(t))]u(t),\\y(t)&=[C+\Delta C(\sigma(t))]x(t).\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $x(t)$,$u(t)$,$y(t)$定义同前,$\sigma(t)$为 q 维不确定参数变量,各矩阵维数适当.假定(A,B)可控,(A,C)可测,$\Delta A(\sigma(t))$,$\Delta B(\sigma(t))$,$\Delta C(\sigma(t))$为连续函数.仍采用观测器状态反馈控制,考虑传感器的可能失效,则闭环组合系统为

$$\dot{x}_c(t)=(A_c+\delta A+\delta A_c)x_c(t),\tag{12}$$

其中 $x_c(t)$,A_c,δA 定义如前,而

$$\delta A_c=\begin{bmatrix}\Delta A & -\Delta BK\\ LF\Delta C & 0\end{bmatrix}.$$

定理 2 若系统(11)的参数摄动满足

$$\|\Delta A(\sigma(t))\|_s\leqslant a,\quad \|\Delta B(\sigma(t))\|_s\leqslant b,\quad \|\Delta C(\sigma(t))\|_s\leqslant c,\tag{13}$$

则闭环组合系统(12)对传感器失效具有完整性且对参数摄动具有鲁棒性的条件为

$$a+b\|K\|_s+c\|L\|_s+\beta\leqslant\frac{1}{2\lambda_M(P)}.\tag{14}$$

其中 β,P 分别满足(8)式和(9)式.

证 取闭环系统的 Lyapunov 函数

$$V(x_c)=x_c^{\mathrm{T}}Px_c.\tag{15}$$

其中 P 是(9)式的对称正定解.考虑传感器失效时闭环系统的状态方程为(12)式,则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_c)&=\dot{x}_c^{\mathrm{T}}Px_c+x_c^{\mathrm{T}}P\dot{x}_c\\&=x_c^{\mathrm{T}}(A_c+\delta A+\delta A_c)^{\mathrm{T}}Px_c+x_c^{\mathrm{T}}P(A_c+\delta A+\delta A_c)x_c\\&=x_c^{\mathrm{T}}(A_c^{\mathrm{T}}P+PA_c)x_c+2x_c^{\mathrm{T}}P\delta Ax_c+2x_c^{\mathrm{T}}P\delta A_cx_c\\&\leqslant-x_c^{\mathrm{T}}x_c+2\|x_c^{\mathrm{T}}P\delta Ax_c\|+2\|x_c^{\mathrm{T}}P\delta A_cx_c\|\\&\leqslant-x_c^{\mathrm{T}}x_c+2\|P\|_s(\|\delta A\|_s+\|\delta A_c\|_s)\|x_c\|^2\\&\leqslant-x_c^{\mathrm{T}}x_c+2\lambda_M(P)(\|L(I-F)C\|_s+\|\Delta A\|_s+\|\Delta BK\|_s+\|LF\Delta C\|_s)\|x_c\|^2\\&\leqslant-x_c^{\mathrm{T}}x_c+2\lambda_M(P)(\beta+a+b\|K\|_s+c\|L\|_s)\|x_c\|^2\\&\leqslant-x_c^{\mathrm{T}}x_c+\|x_c\|^2\\&\leqslant0,\end{aligned}$$

故由 Lyapunov 稳定性定理可知,系统在存在传感器失效和参数摄动的情况下仍是渐近稳定的.

根据上面的定理,可按如下步骤设计系统的鲁棒容错控制器:

1) 确定参数摄动的范数界,即求 a,b,c.

2) 求解 K 阵.选取系统的性能指标函数为

$$J=\int_0^\infty e^{2\delta t}(x^{\mathrm{T}}Q_1x+u^{\mathrm{T}}R_1u)\mathrm{d}t.\tag{16}$$

其中 $\delta\geqslant0$,$Q_1\geqslant0$,$R_1>0$ 可根据对系统的性能要求适当选取,由最优调节器原理可知

$$K=R_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1.\tag{17}$$

其中 P_1是代数 Riccati 方程

$$(A+\delta I)^{\mathrm{T}}P_1+P_1(A+\delta I)-P_1BR_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1+Q_1=0\tag{18}$$

的对称正定解.

3）求解 L 阵. 因系统 $\Sigma[A,B,C]$ 是完全可控、可测，由极点配置定理和分离定理可知，对任选的一组期望极点 $\{\bar{\lambda}_i, i=1,2,\cdots,n\}$，存在 L 阵使观测器极点 $\{\lambda_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 配置到期望极点上. 由此可根据对观测器的性能要求选取一组期望极点来确定 L 阵.

4）根据(8)式、(9)式分别求出 β 和 P 阵，验证(14)式是否满足，若不满足，适当增加 δ 及修改观测器的期望极点，重做步骤 2)，3)，直至所得控制器满足(14)式，则所得的就是系统的鲁棒容错控制器.

4 设计实例

考虑不确定线性多变量系统

$$\dot{x}(t) = \left\{ \begin{bmatrix} -2.6 & 1 \\ 0 & -1.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1(t) \\ \sigma_2(t) & 0 \end{bmatrix} \right\} x(t) + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_3(t) \\ \sigma_4(t) \end{bmatrix} \right\} u(t),$$

$$y(t) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & \sigma_2(t) \\ \sigma_2(t) & \sigma_1(t) \end{bmatrix} \right\} x(t).$$

其中

$$\sigma_1(t) = 0.01\sin t, \quad \sigma_2(t) = 0.01\cos t,$$

$$\sigma_3(t) = 0.01e^{-t}\sin t, \quad \sigma_4(t) = 0.01e^{-t}\cos t.$$

根据上面的设计步骤，取 $\delta=2.5, Q_1=2I, R_1=1$，观测器期望极点为 $\{-3.0, -2.5\}$，可求得控制器

$$\begin{cases} K = [1.204 \quad 2.784], \\ L = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

经验证满足(14)式，故由定理2可知该控制器是上述系统的鲁棒容错控制器.

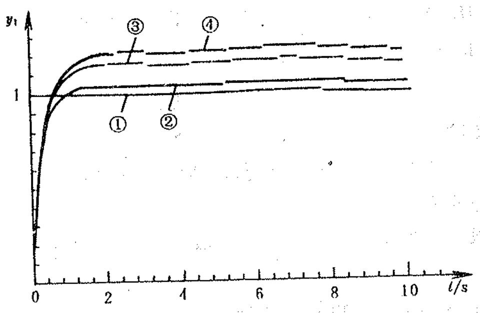

图 2　输出 y_1 的阶跃响应曲线

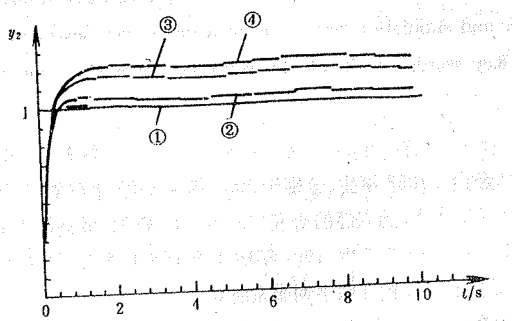

图 3　输出 y_2 的阶跃响应曲线

图2和图3是系统输出 y_1 和 y_2 的仿真结果，图中，曲线①，②，③，④分别为正常系统、传感器 y_1 失效、传感器 y_2 失效、传感器 y_1 和 y_2 均失效时系统的阶跃响应曲线. 仿真结果表明，传感器失效时，尽管系统输出有一定的稳态误差，但系统稳定，说明本文提出的方法是有效的.

5 结　论

本文研究了对传感器失效具有完整性的基于观测器状态反馈的控制器设计问题，提出了一种对传感器失效具有完整性的控制器设计方法，进而讨论了存在参数摄动的系统

的鲁棒容错控制器设计问题，给出了鲁棒容错控制器的设计步骤，并用设计实例及仿真结果验证了所提出方法的有效性.

参 考 文 献

[1] Shimemura, E. and Fujita, M.. A Design Method for Linear State Feedback System Possessing Integrity Based on a Solution of a Riccati-Type Equation. Int. J. Control, 1985, 42(4):887—899

[2] Shieh, L. S. et al. Optimal Pole-Placement for State-Feedback Systems Possessing Integrity. Int. J. Systems Sci., 1988, 19(8):1418—1435

[3] Jaworska, I. and Tzafestas, S.. Improvement of Systems Reliability Using Robust Control Theory. Int. J. Systems Sci., 1991, 22(3):587—593

[4] Medanic, J. V. et al. On the Design of Reliable Control Systems. Proceedings of the 1990 American Control Conference, 1990, 3030—3035

Design of Robust Fault-Tolerant Control Systems

SUN Jinsheng, LI Jun and FENG Zuangang

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science & Technology · Nanjing, 210014, PRC)

HU Shousong

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Aeronautics · Nanjing, 210016, PRC)

Abstract: In this paper, we consider the problem of fault-tolerant control for observer-based state feedback contorl systems. A design method of controller possessing integrity to sensor failure is presented. Then systems with uncertainties are discussed. Design procedure of robust fault-tolerant controller is given and an illustrative example and simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed design method.

Key words: fault-tolerant control; robustness; sensor failure

本文作者简介

孙金生 1967年生. 分别于1990年和1992年在华东工学院自动控制系获工学学士和工学硕士学位，现为南京理工大学博士生. 感兴趣的研究方向为大系统的分散鲁棒控制，动态系统的容错控制等.

李　军 1970年生. 1991年毕业于华东工学院，现在南京理工大学攻读硕士学位. 感兴趣的研究方向为模糊控制，容错控制和高精度数字伺服系统等.

冯缵刚 1927年生. 1948年毕业于浙江大学物理系并留校任教，1953年调哈尔滨军事工程学院任教. 现为南京理工大学自动控制系教授，博士生导师. 主要研究领域为动态大系统的容错控制，随机控制等.

胡寿松 1937年生. 南京航空航天大学教授，中国自动化学会理事，江苏省自动化学会副理事长. 主要研究领域为：动态大系统的分散鲁棒控制，动态大系统的容错控制，非线性控制系统的自修复等.