隐式自校正增量型模型算法控制器的全局收敛性

石中锁　舒迪前　孙一康
(北京科技大学自动化系, 100083)

摘要：本文给出了一种基于脉冲响应模型的隐式自校正预测控制器，利用两个辨识器证明了其全局收敛性.

关键词：自校正控制；预测控制；隐式算法；全局收敛性

1 引　言

基于脉冲响应函数的预测控制是由 Mehra, R. K.[1]等首先提出来的. 由于其易于建模的特点,受到工程界及控制理论界的广泛重视. 文[2]分析了显式自校正增量型模型算法控制的内模结构及其全局收敛性. 本文在[1,2]基础上,提出了一种隐式算法,并证明了其全局收敛性.

2 控制算法

2.1 多步输出预测

设对象为渐近稳定的系统,其基于脉冲响应函数的真实模型为:

$$y(k+1)=y(k)+g(z^{-1})\Delta u(k)+C(z^{-1})\xi(k+1). \tag{1a}$$

其中

$$g(z^{-1})=g_1+g_2z^{-1}+\cdots+g_Nz^{-N+1}. \tag{1b}$$

脉冲响应取 N 项,截取误差及各种干扰噪声为一平稳过程,记为 $C(z^{-1})\xi(k)$,$\xi(k)$为独立白噪声,$C(z^{-1})$为首一且稳定的多项式.

由于系统真实模型往往不知,实际中,控制器的设计是针对一理论模型. 假设理论模型的截断误差及各种噪声干扰也为平稳过程,记为 $C_m(z^{-1})\xi(k)$,$C_m(z^{-1})$首一且稳定的多项式. 则理论模型为

$$y_m(k+1)=y_m(k)+g_m(z^{-1})\Delta u(k)+C_m(z^{-1})\xi(k+1). \tag{2}$$

取预测时域长度为 P,控制时域长度为 M,(2)式写成向量形式后,去掉控制时域以外的项可得[3]

$$Y_m(k+1)=Y_m(k)+G\Delta U(k)+F_0\Delta U(k-1)+C_m(z^{-1})\bar{\xi}(k+1). \tag{3a}$$

式中

$$\begin{aligned}
&Y_m(k+1)=[y_m(k+1),\ y_m(k+2),\ \cdots,\ y_m(k+p)]^{\mathrm{T}},\\
&\Delta U(k)=[\Delta u(k),\ \Delta u(k+1),\ \cdots,\ \Delta u(k+M-1)]^{\mathrm{T}},\\
&\Delta U(k-1)=[\Delta u(k-N+1),\ \Delta u(k-N+2),\ \cdots,\ \Delta u(k-1)]^{\mathrm{T}},\\
&\bar{\xi}(k+1)=[\xi(k+1),\ \xi(k+2),\ \cdots,\ \xi(k+p)]^{\mathrm{T}},\\
&Y_m(k)=[y_m(k),\ y_m(k+1),\ \cdots,\ y_m(k+p-1)]^{\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{3b}$$

本文于1992年8月10日收到. 1993年9月1日收到修改稿.

$$G=\begin{bmatrix}\hat g_1 & & & \\ \hat g_2 & \hat g_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat g_M & \cdots & \cdots & \hat g_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \hat g_1 & \cdots & & \hat g_{p-M+1}\end{bmatrix},\quad F_0=\begin{bmatrix}\hat g_N & \hat g_{N-1} & \cdots & \hat g_3 & \hat g_2 \\ & \hat g_N & \cdots & \hat g_4 & \hat g_3 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & \\ & & \hat g_N & \cdots\ \hat g_{p+2} & \hat g_{p+1}\end{bmatrix}.$$

(3a)式中的 $Y_m(k)$ 仍含有未来项，需进一步将其分解为已知项和未来项.

$$Y_m(k)=SY_m(k+1)+Y_m^0(k). \tag{4}$$

式中

$$Y_m^0(k)=[y_m(k),\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm T},$$

$$S=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ 1 & \ddots & & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{5}$$

(4)式代入(3a)式化简有

$$Y_m(k+1)=\overline{G}\Delta U(k)+\overline{F}_0\Delta U(k-1)+\overline{Y}_m^0(k)+C_m(z^{-1})\bar\eta(k+1). \tag{6}$$

其中

$$\overline{G}=\overline{S}G,\quad \overline{F}_0=\overline{S}F_0,\quad \overline{S}=(I+S)^{-1},$$

$$\bar\eta(k+1)=\overline{S}\xi(k+1)=[\eta'(k+1),\ \eta'(k+2),\ \cdots,\ \eta'(k+p)]^{\mathrm T},$$

$$\eta'(k+i)=\sum_{j=1}^{i}\xi(k+j),\quad i=1,2,\cdots,p, \tag{7}$$

$$\overline{Y}_m^0(k)=[y_m(k),y_m(k),\cdots,y_m(k)]^{\mathrm T}.$$

上述基于理论模型的多步输出 $Y_m(k+1)$ 并不等于基于真实模型的多步输出，用 k 时刻系统的真实输出与模型输出的差 $e'(k)=y(k)-y_m(k)$ 来修正，则经修正后的多步输出为

$$\begin{aligned}Y(k+1)&=Y_m(k+1)+H'e'(k)\\&=\overline{G}\Delta U(k)+\overline{F}_0\Delta U(k-1)+\overline{Y}^0(k)+He'(k)+C_m(z^{-1})\bar\eta(k+1).\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$H=H'-I_m=[h_1'-1,\ h_2'-1,\ \cdots,\ h_p'-1]^{\mathrm T}=[h_1,h_2,\cdots,h_p]^{\mathrm T},$$

$$\overline{Y}^0(k)=[y(k),y(k),\cdots,y(k)]^{\mathrm T},\quad H'=[h_1',\ h_2',\ \cdots,\ h_p']^{\mathrm T},$$

$$Y(k+1)=[y(k+1),\ y(k+2),\ \cdots,\ y(k+p)]^{\mathrm T}.$$

多步输出预测取

$$Y_p(k+1)=\overline{G}\Delta U(k)+\overline{F}_0\Delta U(k-1)+\overline{Y}^0(k)+He'(k). \tag{9}$$

2.2 控制律的求取

选取含有控制量加权的二次型性能指标

$$J_p=[Y_p(k+1)-Y_r(k+1)]^{\mathrm T}[Y_p(k+1)-Y_r(k+1)]+\Delta U^{\mathrm T}(k)\Delta U(k), \tag{10}$$

将(9)式代入(10)式并令 $\frac{\partial J_p}{\partial \Delta U(k)}=0$，化简后得

$$\Delta U(k)=(\overline{G}^{\mathrm T}\overline{G}+\lambda I)^{-1}\overline{G}^{\mathrm T}[Y_r(k+1)-\overline{F}_0\Delta U(k-1)-\overline{Y}^0(k)-He'(k)]. \tag{11}$$

其中

$$\overline{Y}_r(k+1)=[y_r(k+1),y_r(k+2),\cdots,y_r(k+p)]^{\mathrm T}.$$

其它符号同前.

将(11)式展开即可求出从 k 到 $k+M-1$ 时刻进行顺序开环控制的增量 $\Delta u(k)$, $\Delta u(k+1)$, …, $\Delta u(k+M-1)$. 通常采用只执行当前时刻的控制量, $k+1$ 及其以后时刻的控制量重新计算的闭环控制策略.

即

$$\Delta u(k) = d^{\mathrm{T}}[Y_r(k+1) - \overline{F}_0\Delta U(k-1) - \overline{Y}^0(k) - He'(k)]. \tag{12a}$$

式中

$$d^{\mathrm{T}} = [1, 0, \cdots, 0](\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G} + \lambda I)^{-1}\overline{G}^{\mathrm{T}}. \tag{12b}$$

3 隐式自校正算法及其全局收敛性

3.1 等价性能指标

性能指标(10)式等价于下面的指标

$$J = E\{[Y_f(k+1) + \overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U_f(k) - Y_{rf}(k+1)]^{\mathrm{T}} \cdot [Y_f(k+1) + \overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U_f(k) - Y_{rf}(k+1)]\}.$$

其中

$$Y_f(k+1) = \frac{1}{C_m}Y(k+1), \quad \Delta U_f(k) = \frac{1}{C_m}\Delta U(k), \quad Y_{rf}(k+1) = \frac{1}{C_m}Y_r(k+1).$$

定义广义输出

$$\Phi_f(k+1) = \frac{1}{C_m}[Y(k+1) + \overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k)],$$

则广义输出预报为

$$\hat{\Phi}_f(k+1) = \frac{1}{C_m}[Y_p(k+1) + \overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k)],$$

且有

$$\Phi_f(k+1) = \hat{\Phi}_f(k+1) + \bar{\eta}(k+1).$$

因为

$$Y(k+1) = Y_p(k+1) + C_m(z^{-1})\bar{\eta}(k+1),$$

即

$$\begin{aligned} Y_p(k+1) &= Y(k+1) - C_m(z^{-1})\bar{\eta}(k+1) \\ &= \overline{G}\Delta U(k) + \overline{F}_0\Delta U(k-1) + \overline{Y}^0(k) + He'(k), \end{aligned} \tag{13}$$

所以

$$\begin{aligned} J &= E\left\{\left[\frac{1}{C_m}Y_p(k+1) + \frac{1}{C_m}\overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k) - \frac{1}{C_m}Y_r(k+1) + \bar{\eta}(k+1)\right]^{\mathrm{T}}\right. \\ &\quad \left.\cdot\left[\frac{1}{C_m}Y_p(k+1) + \frac{1}{C_m}\overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k) - \frac{1}{C_m}Y_r(k+1) + \bar{\eta}(k+1)\right]\right\} \\ &= E\left[\frac{1}{C_m}Y_p(k+1) + \frac{1}{C_m}\overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k) - \frac{1}{C_m}Y_r(k+1)\right]^{\mathrm{T}} \\ &\quad \cdot\left[\frac{1}{C_m}Y_p(k+1) + \frac{1}{C_m}\overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k) - \frac{1}{C_m}Y_r(k+1)\right] + E[\bar{\eta}(k+1)]^{\mathrm{T}}[\bar{\eta}(k+1)]. \end{aligned}$$

故最优控制律由下式求出

$$\frac{1}{C_m}Y_p(k+1) + \frac{1}{C_m}\overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k) - \frac{1}{C_m}Y_r(k+1) = 0. \tag{14}$$

由(13),(14)式可求出最优控制律

$$\overline{G}\Delta U(k) + \overline{F}_0\Delta U(k-1) + \overline{Y}^0(k) + He'(k) + \overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k) = Y_r(K+1),$$

$$[\overline{G} + \overline{G}(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G})^{-1}\lambda]\Delta U(k) = Y_r(k+1) - \overline{F}_0\Delta U(k-1) - \overline{Y}^0(k) - He'(k).$$

上式两边同乘$(1, 0, \cdots, 0)[\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I]^{-1}\overline{G}^T$有

$$\Delta U(k)=(1, 0, \cdots, 0)[\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I]^{-1}\overline{G}^T[Y_r(k+1)-\overline{F}_0\Delta U(k-1)-\overline{Y}^0(k)-He'(k)]. \tag{15}$$

由于(12a)式与(15)式相同，故两个性能指标等价.

3.2　参数辨识方程与辨识算法

由

$$\hat{\Phi}_f(k+1)=Y_p(k+1)+\overline{G}(\overline{G}^T\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k)-[C_m(z^{-1})-1]\hat{\Phi}_f(k+1),$$
$$\hat{\Phi}_f(k+1)=Y_{rf}(k+1),$$

则

$$\hat{\Phi}_f(k+1)=Y_p(k+1)+\overline{G}(\overline{G}^T\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k)-C^*(z^{-1})Y_{rf}(k+1).$$

而

$$\Phi_f(k+1)=\hat{\Phi}_f(k+1)+\bar{\eta}(k+1).$$

所以

$$\Phi_f(k+1)=Y_p(k+1)+\overline{G}(\overline{G}^T\overline{G})^{-1}\lambda\Delta U(k)-C^*(z^{-1})Y_{rf}(k+1)+\bar{\eta}(k+1). \tag{16}$$

(13)式代入(16)式得

$$\Phi_f(k+1)=[\overline{G}+\overline{G}(\overline{G}^T\overline{G})^{-1}\lambda]\Delta U(k)+\overline{F}_0\Delta U(k-1)+\overline{Y}^0(k)+He'(k)$$
$$-C^*(z^{-1})Y_{rf}(k+1)+\bar{\eta}(k+1). \tag{17}$$

引入下面的记号：

$$\alpha(z^{-1})=\alpha_1 z^{-p+1}+\cdots+\alpha_{p-1}z^{-1}+\alpha_p$$
$$=(1,0,\cdots,0)[\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I]^{-1}\overline{G}^T[z^{-p+1},z^{-p+2},\cdots,z^{-1},z^0],$$
$$m_0=(1,0,\cdots,0)(\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I)^{-1}\overline{G}^T(1,\cdots,1)^T,$$
$$V(k+p)=(1,0,\cdots,0)(\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I)^{-1}\overline{G}^T\bar{\eta}(k+1),$$
$$m_1=(1,0,\cdots,0)(\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I)^{-1}\overline{G}^T(h_1,h_2,\cdots,h_p)^T,$$
$$\beta(z^{-1})=(1,0,\cdots,0)(\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I)^{-1}\lambda[z^{-M+1},z^{-M+2},\cdots,z^{-1},z^0]^T,$$
$$\gamma(z^{-1})=(1,0,\cdots,0)(\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I)^{-1}\overline{F}_0[z^{-N+1},z^{-N+2},\cdots,z^{-1},z^0]^T.$$

用$(1, 0, \cdots, 0)(\overline{G}^T\overline{G}+\lambda I)^{-1}\overline{G}^T$乘(17)式得：

$$\alpha(z^{-1})y_f(k+p)+\beta(z^{-1})\Delta u_f(k+M-1)$$
$$=[1+z^{-1}\gamma(z^{-1})]\Delta u(k)+m_0 y(k)+m_1 e'(k)$$
$$-C^*(z^{-1})\alpha(z^{-1})y_{rf}(k+p)+V(k+p). \tag{18}$$

令　$\bar{\alpha}(z^{-1})=\dfrac{1}{\alpha_p}\alpha(z^{-1}),\quad \bar{\beta}(z^{-1})=\dfrac{1}{\alpha_p}\beta(z^{-1}),\quad \bar{\gamma}(z^{-1})=\dfrac{1}{\alpha_p}[1+z^{-1}\gamma(z^{-1})],$

$$\overline{m}_0=\frac{m_0}{\alpha_p},\quad \overline{m}_1=\frac{m_1}{\alpha_p},\quad \overline{V}(k+p)=\frac{1}{\alpha_p}V(k+p).$$

并定义

$$\Phi(k+p)=\bar{\alpha}(z^{-1})y_f(k+p)+\bar{\beta}(z^{-1})\Delta u_f(k+M-1),$$
$$y_r^*(k+p)=\bar{\alpha}(z^{-1})y_{rf}(k+p).$$

(18)式两边同除α_p得

$$\Phi(k+p)=\varphi^T(k)\theta+\overline{V}(k+p), \tag{19}$$

$$\varphi^T(k)=[-y_r^*(k+p-1),\cdots,-y_r^*(k+p-n_c),$$
$$\Delta u(k-N),\cdots,\Delta u(k),y(k),e'(k)], \tag{20a}$$

$$\theta^{\mathrm{T}}=[c_1^0,c_2^0,\cdots,c_{n_c}^0,\bar{\gamma}_1,\cdots,\bar{\gamma}_{n_y},\bar{m}_0,\bar{m}_1]. \tag{20b}$$

再看由算法推导出的控制律(12a)式，两边同除 α_p 后，利用前面引入的记号易得

$$y_r^*(k+p)=\varphi^{\mathrm{T}}(k)\theta. \tag{21}$$

当 $\Phi(\cdot)$，$y_r^*(\cdot)$ 已知时，退后 p 步，用改进型最小二乘法估计控制器参数 θ，易知(21)式中的 θ 为 $\hat{\theta}$ 便求得控制律. 为此必须修改数据向量 $\varphi^{\mathrm{T}}(k)$，引入 $y_r^*(k)$ 的验后预报 $\bar{y}(k)$，以 $\bar{y}(k)$ 取代数据向量中的 $y_r^*(k)$，即

$$\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)=[-\bar{y}(k+p-1),\cdots,\bar{y}(k+p-n_c),\Delta u(k-N),\cdots,\Delta u(k),y(k),e'(k)]. \tag{22}$$

其中
$$\bar{y}(k)=\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\hat{\theta}(k). \tag{23}$$

改进型最小二乘辨识算法

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-p)+a(k-p)\bar{p}(k-p)\hat{\varphi}(k-p)[\Phi(k)-\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\hat{\theta}(k-p)], \tag{24}$$

$$\bar{p}(k-p)=\bar{p}(k-2p)-\frac{\bar{p}(k-2p)\hat{\varphi}(k-2p)\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-2p)\bar{p}(k-2p)}{1+\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-2p)\bar{p}(k-2p)\hat{\varphi}(k-p)}, \tag{25}$$

$$a(k-p)=1. \tag{26}$$

其中 $\bar{p}(-2p)=\bar{p}(-2p+1)=\cdots=\bar{p}(-p)=\delta I$（$\delta$ 为正数），如果下列条件

$$\mathrm{A}:\quad \gamma(k-p)\operatorname{tr}\bar{p}(k-p)\leqslant k_1<\infty. \tag{27}$$

式中
$$\gamma(k-p)=\gamma(k-p-1)+\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\hat{\varphi}(k-p), \tag{28a}$$

$$\gamma(-p-1)=\gamma(-p)=\cdots=\gamma(-1)=n_\alpha+n_\beta+1, \tag{28b}$$

$$\mathrm{B}:\quad \hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\bar{p}(k-2p)\hat{\varphi}(k-p)\leqslant k_2<\infty. \tag{29}$$

不满足，则

$$\bar{p}(k-p)=\frac{\gamma(k-2p)}{\gamma(k-p)}\bar{p}(k-2p), \tag{30a}$$

$$a(k-p)=\frac{1}{1+\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\bar{p}(k-p)\hat{\varphi}(k-p)}. \tag{30b}$$

式中

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)=[&-\bar{y}(k-1),-\bar{y}(k-2),\cdots,\bar{y}(k-n_c),\\&\Delta u(k-N-p),\cdots,\Delta u(k-p),y(k-p),e'(k-p)].\end{aligned} \tag{31}$$

由下式计算控制律

$$\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\theta}(k)=y_r^*(k+p). \tag{32}$$

由于 $\Phi(\cdot)$，$y_r^*(\cdot)$ 由当前时刻的理论模型参数计算得出，自适应情况下，理论模型是不知的，在此另外设计一个辨识器辨识构成 $\Phi(\cdot)$，$y_r^*(\cdot)$ 的参数，和(19)～(32)式一起构成自适应系统.

对真实模型做(3)～(7)式处理后，同加上 $\lambda\Delta U(k)$，整理后得

$$\begin{aligned}\Delta U(k)=(\overline{G}^{\mathrm{T}}\overline{G}+\lambda I)^{-1}\{\overline{G}^{\mathrm{T}}[&Y(k+1)-\overline{F}_0\Delta U(k-1)-\overline{Y}^0(k)\\&-C(z^{-1})\bar{\eta}(k+1)]+\lambda\Delta U(k)\}.\end{aligned} \tag{33}$$

(33)式取首行并考虑前面引入的记号得：

$$y(k+p)=\frac{\alpha_1}{\alpha_p}y(k+1)-\frac{\alpha_2}{\alpha_p}y(k+2)-\cdots-\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}y(k+p-1)$$

$$+\frac{\gamma_1}{\alpha_p}\Delta u(k-N)+\cdots+\frac{\gamma_N}{\alpha_p}\Delta u(k-1)+\frac{m_0}{\alpha_p}y(k)$$
$$-\frac{\beta_1-1}{\alpha_p}\Delta u(k)-\frac{\beta_2}{\alpha_p}\Delta u(k+1)-\cdots-\frac{\beta_M}{\alpha_p}\Delta u(k+M-1)$$
$$+C(z^{-1})D(z^{-1})\xi(k+p). \tag{34}$$

其中
$$D(z^{-1})=\frac{\alpha_1}{\alpha_p}z^{-p+1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_p}z^{-p+2}+\cdots+\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}z^{-1}+z^0.$$

记
$$\overline{C}(z^{-1})=C(z^{-1})D(z^{-1})=1+\overline{C}_1z^{-1}+\overline{C}_2z^{-2}+\cdots+\overline{C}_{\bar{n}_c}z^{-\bar{n}_c}. \tag{35}$$

则(34)式可写成：
$$y(k+p)=\varphi_n^{\mathrm{T}}(k+p-1)\theta_n+\xi(k+p). \tag{36}$$

其中
$$\varphi_n^{\mathrm{T}}(k+p-1)=[-y(k+1),\cdots,-y(k+p-1),\Delta u(k-N),\cdots,\Delta u(k-1),y(k),$$
$$-\Delta u(k),\cdots,\Delta u(k+M-1),\xi(k+1),\cdots,\xi(k+p-1)], \tag{37a}$$

$$\theta_n^{\mathrm{T}}=\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_p},\cdots,\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p},\frac{\gamma_1}{\alpha_p},\cdots,\frac{\gamma_{n\gamma}^1}{\alpha_p},\frac{m_0}{\alpha_p},\frac{\beta_1-1}{\alpha_p},\frac{\beta_2}{\alpha_p},\cdots,\frac{\beta_M}{\alpha_p},\overline{C}_1,\cdots,\overline{C}_{\bar{n}_c}\right] \tag{37b}$$

对于(36)式，退后 p 步，用下面的随机梯度法来估计其中的参数 θ_n

$$\hat{\theta}_n(k)=\hat{\theta}_n(k-1)+\frac{\bar{a}}{r_n(k)}\hat{\varphi}(k-1)\hat{\xi}(k), \tag{38}$$
$$r_n(k)=r_n(k-1)+\hat{\varphi}_n^{\mathrm{T}}(k)\hat{\varphi}_n(k),\quad r_n(0)=1, \tag{39}$$
$$\hat{\xi}(k)=y(k)-\hat{\varphi}_n^{\mathrm{T}}(k-1)\hat{\theta}_n(k-1). \tag{40}$$

3.3 隐式自校正算法步骤

1) 置初始值. 2) 由(38)～(40)式估计 $\theta_n(k)$. 3) 计算 $\Phi(k)$. 4) 由(24)～(30)式辨识参数 $\hat{\theta}(k)$. 5) 由(32)式计算控制律. 6) 返回 2).

3.4 全局收敛性分析

下面给出全局收敛性分析所需的假设.

A1) $g(z^{-1}),C(z^{-1})$的上界 N,n_c 已知且都是稳定多项式；

A2) $\overline{C}(z^{-1})-\frac{\bar{a}}{2}$严格正实，其中 $\overline{C}(z^{-1})=C(z^{-1})D(z^{-1})$；

A3) $\frac{1}{C_m(z^{-1})}-\frac{1}{2}$严格正实；

A4) $E\{\xi(k)|F_{k-1}\}=0$, a. s.

$E\{\xi^2(k)|F_{k-1}\}=\sigma^2$, a. s.

$\sup\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi^2(k)<\infty$. a. s.

$\xi(k)$为定义在概率空间$\{Q,A,P\}$中的随机过程，它可转化为递增 σ-代数$\{F_n,n\in N\}$序列，F_n 由 0 到 n 时刻为止的观测值所产生.

引理 1　辨识算法(24)～(31)式具有下列性质：

1) $\gamma(k-p)\mathrm{tr}\bar{p}(k-p)\leqslant k_2<\infty$,

2) $\sum_{k=p}^{\infty}\frac{O(k)}{\gamma(k-p)}<k_3<\infty$,

3) $1-O(k)\geqslant\frac{1}{k_4}>0$,

4) $e(k)=\frac{\eta(k)}{1-O(k)}$.

式中　$e(k)=\Phi(k)-y_r^*(k)$,　$\eta(k)=\Phi(k)-\bar{y}(k)$,

$O(k)=a(k-p)\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\bar{p}(k-p)\hat{\varphi}(k-p)$,　$\bar{y}(k)=\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\hat{\theta}(k)$.

证明见[3].

引理 2　假设A1),A3)成立,自校正算法(24)~(31)式使下式成立

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{N}{r(N)}\right]\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}z^2(k)=0.\quad \text{a.s.}$$

式中
$$z(k)=\Phi(k+p)-\bar{y}(k+p)-\bar{V}(k+p).\tag{41}$$

证明见[4].

引理 3　假设A1),A2)成立,则辨识算法(38)~(40)式以WP1有:

P1) $\|\theta_n(k)\|<M<\infty$,　$\forall\ k$.

P2) $\lim\limits_{k\to\infty}\|\theta_n(k)-\theta_n(k-d)\|=0$,　对任一给定的正整数 d.

P3) $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}z_n^2(k)/r_n(k)<\infty$.

式中
$$z_n(k-1)=\hat{\xi}(k)-\xi(k).$$

证明见[5].

隐式自校正控制系统的全局收敛性有下面的结论.

定理　i) 假设A1)~A4)成立.

ii) $H(z^{-1})=\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})$ 的根在单位圆内. 自适应算法有下面的结论:

1) $\limsup\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}y^2(k)<\infty$,　a.s.

2) $\limsup\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\Delta u^2(k)<\infty$,　a.s.

3) $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}E\{[\Phi(k)-y_r^*(k)]^2|F_{k-p}\}=\gamma^2$,　a.s.

4) $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}E\left\{\left[y(k+p)-\frac{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})}{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})z^{-(p-M)}}y_r(k+p)\right]^2\Big|F_k\right\}<\gamma_0$,　($\gamma_0$ 为大于零的常数).

证　由 $e(k)$ 的定义得

$$\begin{aligned}C_m(z^{-1})e(k+p)&=C_m(z^{-1})[\Phi(k+p)-y_r^*(k+p)]\\&=\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})y(k+p)+\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})\Delta u(k+M-1)-\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})y_r(k+p).\end{aligned}\tag{42}$$

又
$$\Delta y(k+p)=g_m(z^{-1})\Delta u(k+p-1)+C_m(z^{-1})\xi(k+p).\tag{43}$$

(42)式乘 Δ,再利用(43)式有

$$\begin{aligned}&[\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+z^{-(p-M)}\Delta\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})]\Delta u(k+p-1)\\&=\Delta C_m(z^{-1})e(k+p)+\Delta\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})y_r(k+p)-\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})C_m(z^{-1})\xi(k+p).\end{aligned}\tag{44}$$

由 $H(z^{-1})$ 的稳定性、引理3、$y_r(k)$ 的有界性、A4)和[3]中附录的引理 A1)有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Delta u^2(k) \leqslant \frac{\bar{k}_1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^2(k) + \bar{k}_2. \tag{45}$$

同理(42)式乘 $g_m(z^{-1})$，利用(43)式有

$$\begin{aligned}[\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1}) &+ z^{-(p-M)}\Delta\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})]y(k+p)\\ &= g_m(z^{-1})C_m(z^{-1})e(k+p) + \hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})y_r(k+p)\\ &\quad + z^{-(p-M)}(z^{-1})\bar{\beta}(z^{-1})C_m(z^{-1})\xi(k+p),\end{aligned}$$

故有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}y^2(k) \leqslant \frac{\bar{k}_3}{N}\sum_{k=1}^{N}e^2(k) + \bar{k}_4. \tag{46}$$

由引理 1 的 4)及(41)式得

$$e^2(k) = \frac{[z(k-p) + \bar{V}(k)]^2}{[1 + a(k+p)\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-p)\bar{p}(k-p)\hat{\varphi}(k-p)]^2} \leqslant 2k_4^2[z^2(k-p) + \bar{V}_k^2(k)],$$

所以

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^2(k) \leqslant \frac{k_5}{N}\sum_{k=1}^{N}z^2(k-p) + k_6. \tag{47}$$

(45),(46),(47)式有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Delta u^2(k) \leqslant \frac{L_1}{N}\sum_{k=1}^{N}z^2(k) + L_2, \quad L_1 > 0, \quad L_2 > 0, \tag{48}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}y^2(k) \leqslant \frac{L_3}{N}\sum_{k=1}^{N}z^2(k) + L_4, \quad L_3 > 0, \quad L_4 > 0. \tag{49}$$

根据 $\hat{\varphi}(k)$ 的定义知存在正整数 N_1 使得 $k>N_1$ 时

$$\frac{\gamma_n(N)}{N} \leqslant \frac{\bar{k}_5}{N}\sum_{k=1}^{N}z_n^2(k) + \bar{k}_6 \leqslant \frac{\bar{k}_5}{N}\sum_{k=1}^{N}[z_n^2(k) + z^2(k)] + \bar{k}_6. \tag{50}$$

又自适应情况下，理论模型即为第二个辨识器的估计模型，由[3] $e'(k) = Z_n(k-1) + \xi(k)$，根据 $\hat{\varphi}_n(k)$，$r(k)$ 的定义知存在正整数 N_2 使得 $k>N_2$ 时

$$\frac{\gamma(N)}{N} \leqslant \frac{\bar{k}_7}{N}\sum_{k=1}^{N}[z_n^2(k) + z^2(k)] + \bar{k}_8. \tag{51}$$

由引理 3 的 3)及 Kronecker 引理得

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{N}{\gamma_n(N)}\right]\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}z_n^2(k) = 0. \quad \text{a. s.} \tag{52}$$

由(50),(51),(52)式及引理 2 得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k) + z_n^2(k)]}{\dfrac{\bar{k}_9}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k) + z_n^2(k)] + \bar{k}_{10}} = 0. \quad \text{a. s.}$$

其中

$$\bar{k}_9 = \max\{\bar{k}_5,\ \bar{k}_7\}, \quad \bar{k}_{10} = \max\{\bar{k}_6,\ \bar{k}_8\}.$$

于是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k) + z_n^2(k)] = 0. \quad \text{a. s.} \tag{53}$$

故有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}z^2(k) = 0, \text{ a. s.} \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}z_n^2(k) = 0. \quad \text{a. s.} \tag{54}$$

由(50),(51),(53),(54)式得

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\gamma_n(N)}{N}<\infty,\quad \text{a. s.}\qquad \limsup_{N\to\infty}\frac{\gamma(N)}{N}<\infty.\quad \text{a. s.} \tag{55}$$

由(55)式得定理的 1),2).

根据引理 1 的 4)及(41)式

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[e(k)-\bar{V}(k)]^2=\frac{1}{N}\sum_{k=p}^{N}\frac{1}{[1-O(k)]^2}[z(k-p)+O(k)\bar{V}(k)]^2$$

$$\leqslant\frac{2k_4^2}{N}\sum_{k=p}^{N}[z^2(k-p)+O^2(k)\bar{V}^2(k)].$$

因
$$O(k)\leqslant 1,$$
故
$$\sum_{k=p}^{\infty}O^2(k)/\gamma(k-p)<\infty,\quad \text{a. s.}$$
或
$$\sum_{k=p}^{N}O^2(k)E[\bar{V}^2(k)\,|\,F_{k-p}]/\gamma(k-p)<\infty,\quad \text{a. s.}$$
应用单调收敛定理及 Kronecker 引理与(54)式得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=p}^{N}O^2(k)\bar{V}^2(k)=0,\quad \text{a. s.}$$

所以有
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=p}^{N}[e(k)-\bar{V}(k)]^2=0.\quad \text{a. s.}$$
但
$$E[e^2(k)\,|\,F_{k-p}]=E\{[e(k)-\bar{V}(k)+\bar{V}(k)]^2\,|\,F_{k-p}]\}$$
$$=[e(k)-\bar{V}(k)]^2+E[\bar{V}^2(k)\,|\,F_{k-p}],$$
故
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[e^2(k)\,|\,F_{k-p}]=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}[e(k)-\bar{V}(k)]^2+\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}E[\bar{V}^2(k)\,|\,F_{k-p}]=\gamma^2.$$
定理的 3)得证.

由(44)式得

$$y(k+p)-\frac{g_m(z^{-1})\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})}{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})}y_r(k+p)$$

$$=\frac{z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})C_m(z^{-1})\xi(k+p)}{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})}$$

$$+\frac{g_m(z^{-1})C_m(z^{-1})}{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})}[\Phi(k+p)-y_r^*(k+p)].$$

由于 $H(z^{-1})$的根在单位圆内,所以存在正数 C_1,C_2使得:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[y(k+p)-\frac{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})}{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})}y_r(k+p)\right]^2$$

$$\leqslant\frac{C_1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\Phi(k+p)-y_r^*(k+p)]^2+\delta_0^2.$$

上式两边取条件数学期望,并令 $N\to\infty$,则由定理的 3)知

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E\left\{\left[y(k+p)-\frac{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})}{\hat{\bar{\alpha}}(z^{-1})g_m(z^{-1})+\Delta z^{-(p-M)}\hat{\bar{\beta}}(z^{-1})}y_r(k+p)\right]^2\Big|\,F_k\right\}$$

$$\leqslant C_1\gamma^2+\delta_0^2=\gamma_0.$$

4 仿真研究

被控对象的数学模型为

$$(1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2})y(k)$$
$$= z^{-2}(0.5 + 0.7z^{-1})u(k)$$
$$+ (1 - 0.2z^{-1})\xi(k)/(1 - z^{-1}).$$

$\xi(k)$为高斯白噪声，其方差为 0.015，参考信号为幅值为 1 的方波，仿真时用[3]的方法把上述模型化成(1)式的形式. 仿真结果见图 1，预测时域长度 p 取 3，控制时域长度取 2，λ 取 1.

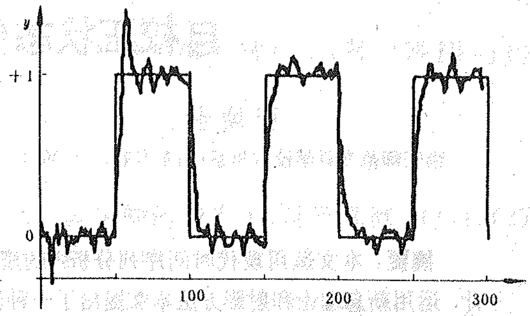

图 1　仿真曲线

5 结　论

本文从理论上证明了所提出的隐式自适应算法在一定条件下是全局收敛的.

参 考 文 献

[1] Mehra, R. K. and Rouhani, R.. Model Algorithmic Control, Theoretical Results on Robustness. Proc. JACC, Denver, 1979

[2] 石中锁，舒迪前. 显式自校正增量型模型算法控制器的内模结构及其全局收敛性. 信息与控制，1993，22(2)：97—104

[3] 舒迪前主编. 自适应控制. 沈阳：东北工学院出版社，1993

[4] Chai, T. Y.. Globally Convergent Self-Tuning Controllers. Int. J. Control, 1988, 48：417—434

[5] Hersh, M. A. and Zerrop, M. B.. Stochastic Adaptive Control of Nonminimum Phase Systems. Optimal Control Application & Method, 1986, 7：153—161

Global Convergence of Implicit Self-Tuning Integral Model Algorithmic Controller

SHI Zhongsuo, SHU Diqian and SUN Yikang

(Department of Automation, Beijing University of Science & Technology · Beijing, 100083, PRC)

Abstract: This paper presents an implicit self-tuning predictive controller based on impulse response model. The global convergence of this algorithm is also given with two identificator.

Key words: self-tuning control; predictive control; implicit algorithm; global convergence

本文作者简介

石中锁　1964 年生. 讲师. 1987 年毕业于东北工学院，后在本溪冶金专科学校任教，1989 年考入北京科技大学自动化系，1992 年获硕士学位，现在北京科技大学自动化系任教. 主要研究方向是自适应控制，过程计算机控制系统，人工神经元网络等，在国内外学术刊物及学术会议上发表论文十余篇.

舒迪前　1927 年生. 1951 年毕业于南京大学工学院电机系. 北京科技大学自动化系教授. 长期从事工业自动化、自动控制及计算机应用等方面的教学和科研工作. 主要研究方向为生产过程的建模，自适应控制和智能控制. 曾获得多项科研成果与奖励. 主编及参加编写了《自适应控制》、《计算机控制系统——理论与应用》等书，发表过学术论文数十篇.

孙一康　1932 年生. 1952 年毕业于清华大学，现为北京科技大学自动化系教授，博士生导师. 主要研究领域是轧钢自动化，过程控制，计算机控制系统，人工神经元网络及应用等，发表论文数十篇.