

自校正状态估计新算法

张焕水

邓自立

(泰安师范专科学校数学系·山东泰安, 271000) (黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080)

摘要: 本文运用现代时间序列分析^[1]的观点处理线性离散时间系统自校正最优状态估计. 运用新息理论和射影方法本文提出了一种新型最优滤波器, 在噪声统计未知时基于辨识 ARMA 新息模型提出了自校正滤波器. 仿真例子说明新算法的有效性.

关键词: 状态估计; 最优; 自校正; 滤波器; ARMA 新息模型

1 引言

众所周知, Kalman 滤波是现代控制理论的重要组成部分, 广泛用于通讯、控制、信号和数据处理等许多不同领域. 但 Kalman 滤波有一大缺点, 它要求精确的模型和噪声统计, 但实际问题中大多数情况上述要求不能满足, 对此自校正、自适应 Kalman 滤波研究当模型和/或噪声统计未知, 或部分已知, 或近似已知时, 如何改善和提高滤波精度具有重要的理论意义和应用价值. 在噪声统计未知的情形下, Sage 和 Husa 在文献[2]中提出了自适应 Kalman 滤波, 但 Sage 和 Husa 的极大后验噪声统计估值器(MAP)是次优的, 因此影响了滤波的精度. 文献[1]、[3]及[4]对上述工作进行了改进和推广, 但其结果仍是次优的. 本文以现代时间序列分析的观点, 提出一种自校正滤波器, 主要工作分为两部分: 1) 首先提出了一种新型的最优滤波器; 2) 在噪声统计未知的情形下, 提出了噪声统计估值器和自校正滤波器. 这种噪声统计估值器当经过一定步数的计算后趋于真实值, 因而改进了滤波精度.

2 问题阐述

考虑线性离散时不变动态系统

$$x(t) = \Phi x(t-1) + \Gamma w(t-1), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2.2)$$

其中 $x(t)$ 为 $n \times 1$ 维状态向量, $w(t)$ 为 $r \times 1$ 维模型噪声, $y(t)$ 为 $m \times 1$ 维观测过程, $v(t)$ 为观测噪声, Φ, H, Γ 为已知的常阵, 我们假定:

1) Φ 的特征值的模小于 1, 或 (2.1), (2.2) 满足完全可观、可控, 并且 Φ 的特征多项式等于其最小多项式.

2) $w(t), v(t)$ 是均值为零的独立白噪声.

$$E(w(t)) = 0, \quad E(v(t)) = 0, \quad E(w(t)v^T(s)) = 0,$$

$$E(w(t)w^T(s)) = Q_w\delta_{ts}, \quad E(v(t)v^T(s)) = Q_v\delta_{ts},$$

• 国家自然科学基金资助课题.

本文于1993年1月5日收到, 1993年7月16日收到修改稿.

其中 Q_w, Q_v 为相应的噪声协方差阵, T 为转置号, E 为均值符号, δ_{tt} 为 Kronecker δ 函数. 初值 $x(0)$ 独立于 $w(t)$ 及 $v(t)$.

本文的问题是: 1° 在系统模型 (2.1), (2.2) 完全已知的情形下, 基于观测 $y(1), y(2), \dots, y(t)$ 求状态 $x(t)$ 的估计 $\hat{x}(t|t)$ 使得

$$J = E\{[x(t) - \hat{x}(t|t)]^T [x(t) - \hat{x}(t|t)]\}$$

达到极小. 通常称 $\hat{x}(t|t)$ 为 $x(t)$ 的最优滤波.

2° 在系统模型 (2.1), (2.2) 的噪声统计 Q_w, Q_v 未知的情形下, 基于观测 $y(1), y(2), \dots, y(t)$ 求 Q_w, Q_v 的估值及状态 $x(t)$ 的渐近最优滤波 $\hat{x}(t|t)$.

3 最优滤波

3.1 ARMA 新息模型

在 1) 的假定下, (2.1), (2.2) 存在稳态 Kalman 预报器^[5]

$$\hat{x}(t|t-1) = \Phi \hat{x}(t-1|t-2) + K_p e(t-1), \quad (3.1)$$

$$y(t) = H \hat{x}(t|t-1) + e(t). \quad (3.2)$$

其中 K_p 是稳态预报器增益阵, $e(t)$ 是稳态新息过程, 它是带零均值的白噪声^[1]. 由 (3.1) 有

$$(I_n - q^{-1}\Phi) \hat{x}(t|t-1) = K_p e(t-1). \quad (3.3)$$

q^{-1} 是单位滞后算子, $q^{-1}\hat{x}(t|t-1) = \hat{x}(t-1|t-2)$. I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵.

于是由 (3.2), (3.3) 有

$$y(t) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1} K_p e(t-1) + e(t). \quad (3.4)$$

应用矩阵求逆的 Fadeeva 公式^[6]

$$(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1} = \frac{\text{adj}(I_n - q^{-1}\Phi)}{\det(I_n - q^{-1}\Phi)} \triangleq \frac{F(q^{-1})}{P(q^{-1})} \triangleq \frac{\sum_{i=0}^{n-1} F_i q^{-i}}{\sum_{i=0}^n P_i q^{-i}}, \quad (3.5)$$

$F(q^{-1})$ 是矩阵多项式, 系数 F_i, P_i 可递推计算为:

$$P_i = -\frac{1}{i} \text{trace}(\Phi F_{i-1}), \quad P_0 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$F_i = \Phi F_{i-1} + P_i I_n, \quad F_0 = I_n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

由假设条件 1) 知 $F(q^{-1})$ 的诸元素与 $P(q^{-1})$ 无公因子相消^[7].

根据 (3.5) 式, (3.4) 式可写为如下 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})e(t). \quad (3.6)$$

其中

$$D(q^{-1}) = I_m + D_1 q^{-1} + \dots + D_n q^{-n}, \quad (3.7)$$

$$A(q^{-1}) = I_m + P_1 I_m q^{-1} + \dots + P_n I_m q^{-n}. \quad (3.8)$$

(3.7) 式中的系数由下面式子决定:

$$D_i = H F_{i-1} K_p + P_i I_m, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.9)$$

I_m 是 $m \times m$ 单位矩阵.

由 (2.1) 式代入 (2.2) 式得:

$$y(t) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1} \Gamma w(t-1) + v(t). \quad (3.10)$$

利用 (3.5) 式可得下式:

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})w(t-1) + A(q^{-1})v(t). \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad C(q^{-1}) &= C_0 + C_1 q^{-1} + \cdots + C_{n-1} q^{-(n-1)}, \\ C_i &= H F_i \Gamma, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

比较(3.6)式与(3.11)式可得:

$$D(q^{-1})\varepsilon(t) = C(q^{-1})w(t-1) + A(q^{-1})v(t). \quad (3.13)$$

$$\text{令} \quad Q(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t) = C(q^{-1})w(t-1) + A(q^{-1})v(t), \quad (3.14)$$

(3.13)式两边分别计算 $E(Q(t)Q^T(t-n))$ 与 $E(Q(t)Q^T(t-n+1))$ 得

$$D_n Q_e = P_n Q_v, \quad (3.15)$$

$$D_{n-1} Q_e + D_n Q_e D_1^T = C_{n-1} Q_v C_0^T + P_{n-1} Q_v + P_n P_1 Q_v. \quad (3.16)$$

ARMA 新息(3.6)中, 由于 $\varepsilon(t)$ 是稳态新息过程, 因此可以证明^[8] $D(q^{-1})$ 是稳定的, 由此 $D(q^{-1})$ 的系数 $D_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 及 $\varepsilon(t)$ 的协方差阵 Q_e 可根据(3.13)由 Gevers-Wouters 算法^[1]唯一求得, 新息 $\varepsilon(t)$ 可根据(3.6)式递推求得.

3.2 最优滤波

引理 系统模型(2.1), (2.2)中

$$\begin{aligned} x(t) &\text{ 与 } w(t), w(t+1), \cdots \text{ 不相关,} \\ v(t) &\text{ 与 } x(1), x(2), \cdots, x(t), \cdots \text{ 不相关,} \\ w(t) &\text{ 与新息 } \varepsilon(t), \varepsilon(t-1), \cdots \text{ 不相关.} \end{aligned}$$

证 根据2)的假定, 易证引理成立.

定理 最优递推滤波公式

$$\hat{x}(t|t) = \Phi \hat{x}(t-1|t-1) + T(t) Q_e^{-1} \varepsilon(t), \quad (3.17)$$

$$T(t) = \Omega - \sum_{i=1}^n \Phi^i T(t-i) D_i^T. \quad (3.18)$$

其中

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i \Gamma Q_v C_i^T. \quad (3.19)$$

证 由射影理论, $\hat{x}(t|t)$ 是 $x(t)$ 在由 $\{y(t), \cdots, y(1)\}$ 所张成的有限维 Hilbert 空间上的射影.

$$\hat{x}(t|t) = \text{proj}\{x(t) | y(t), y(t-1), \cdots, y(1)\}. \quad (3.20)$$

由于 $\varepsilon(t)$ 是观测 $y(t)$ 的新息, 因此上式可写成

$$\hat{x}(t|t) = \text{proj}\{x(t) | \varepsilon(t), \varepsilon(t-1), \cdots, \varepsilon(1)\}. \quad (3.21)$$

由新息的正交性

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + E(x(t)\varepsilon^T(t)) Q_e^{-1} \varepsilon(t). \quad (3.22)$$

根据引理由(2.1)式得

$$\hat{x}(t|t-1) = \Phi \hat{x}(t-1|t-1). \quad (3.23)$$

令

$$T(t) = E(x(t)\varepsilon^T(t)),$$

则(3.22)式变成(3.17)式, 即

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t-1|t-1) + T(t) Q_e^{-1} \varepsilon(t). \quad (3.24)$$

下面证明(3.18)式成立.

证 根据引理, 由(2.1)式两边分别右乘 $w^T(t-1)$ 和 $\varepsilon^T(t-1)$ 取数学期望得如下两个等式.

$$E(x(t)w^T(t-1)) = \Gamma Q_w, \quad (3.25)$$

$$E(x(t)e^T(t-1)) = \Phi E(x(t-1)e^T(t-1)). \quad (3.26)$$

类似由(2.1)式两边分别右乘 $w^T(t-i-1)$ 和 $e^T(t-i)$ 取数学期望得如下重要等式

$$E(x(t)w^T(t-i-1)) = \Phi^i \Gamma Q_w, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3.27)$$

$$E(x(t)e^T(t-i)) = \Phi^i E(x(t-i)e^T(t-i)), \quad i = 0, 1, \dots. \quad (3.28)$$

(3.13)式两边都转置左乘 $x(t)$ 取数学期望得(注意 $x(t)$ 与 $v(s)$ 不相关)

$$E(x(t)(D(q^{-1})e(t))^T) = E(x(t)(C(q^{-1})w(t-1))^T). \quad (3.29)$$

由(3.27)及(3.28)式得

$$(3.29) \text{ 式右边} = \Gamma Q_w C_0^T + \dots + \Phi^{n-1} \Gamma Q_w C_{n-1}^T \triangleq \Omega,$$

$$(3.29) \text{ 式左边} = E(x(t)e^T(t)) + \Phi E(x(t-1)e^T(t-1))D_1^T + \dots \\ + \Phi^n E(x(t-n)e^T(t-n))D_n^T.$$

因此(3.29)式变为下式:

$$T(t) = \Omega - \sum_{i=1}^n \Phi^i T(t-i)D_i^T. \quad (3.30)$$

其中 $\Omega = \Gamma Q_w C_0^T + \dots + \Phi^{n-1} \Gamma Q_w C_{n-1}^T$. 证毕.

上述定理的一点说明:当 Φ 渐近稳定时,即 Φ 的特征根的模小于 1,容易证明当递推步数充分大时以下两个结论成立:1) (3.18)式 $T(t)$ 与初始值 $T(-n+1), \dots, T(0)$ 的选择无关,即 $T(t)$ 初值的误差影响可忽略不计.2) 滤波估值 $\hat{x}(t|t)$ 与初值 $\hat{x}(0|0)$ 选取无关(证明略).由此可知,当 Φ 渐近稳定时,以上定理提出的算法可以不考虑初值的选取.

4 自校正滤波器

现在假定系统模型(2.1)式和(2.2)式中的噪声统计 Q_w, Q_v 未知,此时最优滤波(3.17)~(3.19)可由渐近最优方式来实现,渐近最优滤波(自校正)由如下三步组成.

第一步 引入新的观测 $m(t) = A(q^{-1})y(t)$, 则 ARMA 新息模型(3.6)变为

$$m(t) = D(q^{-1})e(t), \quad (4.1)$$

用递推增广最小二乘法(RELS)辨识(4.1)式可得在 t 时刻系数阵 D_i 的估值 $\hat{D}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 新息 $e(t)$ 的估值 $\hat{e}(t)$ 可递推计算为:

$$\hat{e}(t) = m(t) - \hat{D}_1(t)\hat{e}(t-1) - \dots - \hat{D}_n(t)\hat{e}(t-n). \quad (4.2)$$

第二步 计算噪声统计估值. t 时刻协方差阵 Q_e 的估值 $\hat{Q}_e(t)$ 可用采样方差递推计算为

$$\hat{Q}_e(t) = \hat{Q}_e(t-1) + \frac{1}{t}(\hat{e}(t)\hat{e}^T(t) - \hat{Q}_e(t-1)). \quad (4.3)$$

由(3.15)式可得协方差阵 Q_v 在 t 时刻的估值

$$\hat{Q}_v(t) = \frac{\hat{D}_n(t)\hat{Q}_e(t)}{P_n}. \quad (4.4)$$

由(3.16)式可得协方差阵 Q_w 在 t 时刻的估值 $\hat{Q}_w(t)$

$$\hat{Q}_w(t) = (C_{n-1}^T C_{n-1})^{-1} C_{n-1}^T (\hat{D}_{n-1}(t)\hat{Q}_e(t) + \hat{D}_n(t)\hat{Q}_e(t)\hat{D}_1(t) - P_{n-1}\hat{Q}_v(t) \\ - P_n P_1 \hat{Q}_v(t)) C_0 (C_0^T C_0)^{-1}. \quad (4.5)$$

上式中假定 C_{n-1}, C_0 均列满秩.

第三步 将有关估值代入(3.17)~(3.19)则得自校正滤波器.

$$\hat{x}(t|t) = \Phi \hat{x}(t-1|t-1) + \hat{T}(t)\hat{e}(t), \quad (4.6)$$

$$\hat{T}(t) = \hat{\Omega}(t) - \sum_{i=1}^n \Phi \hat{T}(t-i)\hat{D}_i(t), \quad (4.7)$$

$$\hat{\Omega}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i \Gamma \Gamma^T. \quad (4.8)$$

上述三步在每时刻 t 重复进行.

在一定条件下^[9]上述的参数估计是一致的, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\hat{D}_i(t) \rightarrow D_i$, 则也有 $\hat{e}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, 从而 $\hat{Q}_e \rightarrow Q_e$, $\hat{Q}_w(t) \rightarrow Q_w$, $\hat{Q}_v(t) \rightarrow Q_v$, 即经过一定步数计算后, 噪声统计 Q_w, Q_v 的估值趋于真实值. 从而自校正滤波器(4.6), (4.7)趋于最优滤波器.

5 仿真例子

考虑系统

$$x(t) = \Phi x(t-1) + \Gamma w(t-1), \quad (5.1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (5.2)$$

其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 4.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$H = (1 \quad 1).$$

$w(t), v(t)$ 是均值为零、方差分别为 1 和 0.25 的不相关高斯白噪声. 在仿真中假定 $w(t)$ 与 $v(t)$ 的方差都未知.

易知 ARMA 新息模型

$$(1 - 1.4q^{-1} + 0.45q^{-2})y(t) = (1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2})\varepsilon(t). \quad (5.3)$$

引入新的观测 $m(t) = (1 - 1.4q^{-1} + 0.45q^{-2})y(t)$ 则有 MA 新息模型

$$m(t) = (1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2})\varepsilon(t). \quad (5.4)$$

利用递推增广最小二乘法在线辨识(5.4), 利用(4.3)~(4.5)计算噪声统计, 利用(4.6)~(4.8)计算状态的估值. 仿真结果见图 1 与图 2, 图 3 与图 4. 图 1, 图 2 表明状态 $x_1(t), x_2(t)$ 的自校正滤波估值 $\hat{x}_1(t|t), \hat{x}_2(t|t)$ 分别跟踪 $x_1(t), x_2(t)$ 的变化, 具有良好的跟踪性能. 图 3, 图 4 表明观测噪声 $v(t)$ 及系统噪声 $w(t)$ 的方差估值跟踪真实值的情况, 从图形易看出具有较好的渐近收敛性.

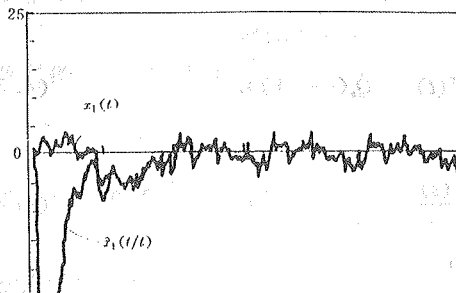


图 1 状态 $x_1(t)$ 和自校正滤波 $\hat{x}_1(t|t)$

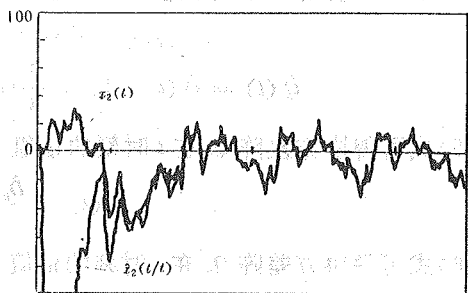
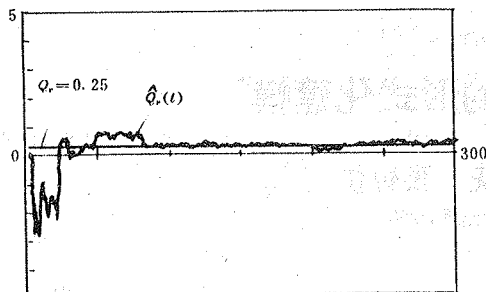
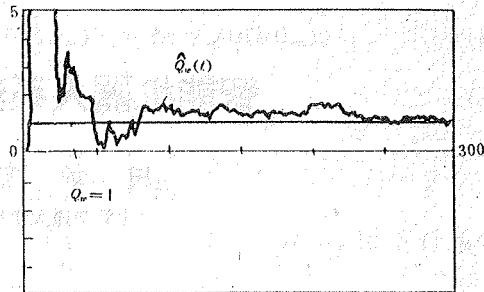


图 2 状态 $x_2(t)$ 与自校正滤波 $\hat{x}_2(t|t)$

图 3 观测噪声 $v(t)$ 方差估值的收敛性图 4 系统噪声 $w(t)$ 方差估值的收敛性

最小二乘法初始值选取: $P(0|0) = I_2 10^7$, $d_{10} = d_{20} = 0$, 状态估计初始值选取: $\hat{x}(0|0) = 0$, $\hat{T}(0) = \hat{T}(-1) = 0$.

参 考 文 献

- [1] 邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及应用——建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989
- [2] Sage, A. P. and Husa, G. W.. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics. JACC. 1969, 769
- [3] Todini, E.. Mutually Interactive State Parameter (MISP) Estimation in Hydrological Applications, Modeling, Identification and Control in Environmental Systems. Vansteekiste, ed., IFIP, North-Holland Publishing Company, 1978
- [4] Yoshimurs, T.. A Technique for Compensating the Filter Performance by a Fictitious Noise. Trans. ASME. Ser. G. J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1978, 100
- [5] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Optimal Filtering. Prentice-Hall, Inc., 1979
- [6] Strojcek, V.. State Space Theory of Discrete Linear Control. John Wiley and Sons, New York, 1981
- [7] 中国科学院数学研究所控制理论研究室. 线性系统的能控性和能观测性. 北京: 科学出版社, 1975
- [8] 邓自立, 李北新. 非平稳 ARMA 信号自校正滤波器及其应用. 自动化学报, 1992, 18(1): 80—86
- [9] Panusk, V.. A New Form of the Extended Kalman Filter for Parameter Estimation in Linear Systems with Correlated Noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, AC-25: 229—235

A New Algorithm for Self-Tuning State Estimation

ZHANG Huanshui

(Department of Mathematics, Tai'an Teacher's College • Tai'an, 271000, PRC)

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

Abstract: This paper deals with the adaptive state estimation for the linear discrete time system from the viewpoint of the modern time series analysis. A new optimal recursive filter is presented by using the innovation theory and projection method, and the self-tuning filter is proposed basing on the identification of the ARMA innovation model when the covariance matrices are unknown. A simulation example shows the usefulness of the new algorithm.

Key words: state estimation; optimal; self-tuning; filter; ARMA innovation model

本文作者简介

张焕水 见本刊 1994 年第 2 期第 145 页.

邓自立 见本刊 1994 年第 2 期第 145 页.