

具有补偿器的菱形对象族的鲁棒稳定性

郭 磊

赵克友

(青岛大学数学系·山东, 266071) (青岛大学电工程系·山东, 266071)

摘要: 本文给出了具有补偿器的菱形对象族鲁棒稳定的充分必要条件. 本文的方法和结论可用来研究菱形对象族的其它鲁棒问题, 还可为补偿器的设计提供有益的方法.

关键词: 鲁棒性; 稳定性; 不确定系统

1 引言

考虑补偿器为 $c(s)$, 控制对象为 $\mathcal{D}(s, \vec{r}, \vec{q})$ 的控制系统. 其中 $\mathcal{D}(s, \vec{r}, \vec{q})$ 为参数不确定型传递函数族

$$\mathcal{D}(s, \vec{r}, \vec{q}) = \mathcal{N}(s, \vec{r}) / \mathcal{D}(s, \vec{q}).$$

这里 $\vec{r} \in \mathbb{R}^1, \vec{q} \in \mathbb{R}^2$, 且 $\vec{r}$ 与 $\vec{q}$ 互相独立, $\mathcal{D}(s, \vec{r}, \vec{q})$ 严格正则. 补偿器 $c(s)$ 为正则的有理传函. 一个自然的问题是: 在何种条件下, 这类不确定性反馈系统具有鲁棒稳定性?

当 $\mathcal{D}(s, \vec{r}, \vec{q})$ 为区间对象族时, 文[1~4]分别针对 $c(s)$ 的不同情形给出了判别这个不确定闭环系统稳定的充要条件.

若不确定传递函数族的系数变化存在有界性和相关性, 则区间对象族模型不再适用, 不确定对象常可表示为如下的实系数菱形对象族

$$\mathcal{D}(s, r, q) = \mathcal{N}(s, r) / \mathcal{D}(s, q). \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(s, r) &= \{f(s) : f(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \sum_{i=0}^n |a_i - a_i^0| \leq r\}, \\ \mathcal{D}(s, q) &= \{g(s) : g(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i, \sum_{i=0}^m |b_i - b_i^0| \leq q\}. \end{aligned} \quad (2)$$

这里设 $f_0(s) = \sum_{i=0}^n a_i^0 s^i, g_0(s) = \sum_{i=0}^m b_i^0 s^i$, 且 $n < m, a_m^0, b_n^0 \neq 0$.

对于菱形多项式族与菱形对象族, 已有文[5, 6]分别就其鲁棒 Hurwitz 稳定性、左扇区稳定性做了研究. 本文将探讨菱形对象族加补偿器后的闭环系统的鲁棒稳定性.

2 符号与引理

对于 $\mathcal{N}(s, r)$, 定义

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(s) &= f_0(s) + r, & f_2^{(1)}(s) &= f_0(s) + rs, \\ f_3^{(1)}(s) &= f_0(s) - r, & f_4^{(1)}(s) &= f_0(s) - rs. \end{aligned}$$

考虑 n 的不同情形, 定义 $f_j^{(2)}(s) (j=1, 2, 3, 4)$ 如下表

表 1 $|\omega| > 1$ 时的顶点多项式

$f_j^{(2)} \backslash n$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$f_1^{(2)}$	$f_0(s) + rs^n$	$f_0(s) + rs^{n-1}$	$f_0(s) - rs^n$	$f_0(s) - rs^{n-1}$
$f_2^{(2)}$	$f_0(s) - rs^{n-1}$	$f_0(s) + rs^n$	$f_0(s) + rs^{n-1}$	$f_0(s) - rs^n$
$f_3^{(2)}$	$f_0(s) - rs^n$	$f_0(s) - rs^{n-1}$	$f_0(s) + rs^n$	$f_0(s) + rs^{n-1}$
$f_4^{(2)}$	$f_0(s) + rs^{n-1}$	$f_0(s) - rs^n$	$f_0(s) - rs^{n-1}$	$f_0(s) + rs^n$

这里 k 为某正整数. 对 $\mathcal{D}(s, q)$ 可类似定义 $g_i^{(l)}(s), l=1, 2; i=1, 2, 3, 4$.

设

$$\mathcal{N}^{\mathcal{V}}(s) = \{f_i^{(l)}(s), i=1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{D}^{\mathcal{V}}(s) = \{g_i^{(l)}(s), i=1, 2, 3, 4\}.$$

对两个多项式 $q_1(s), q_2(s)$, 若设

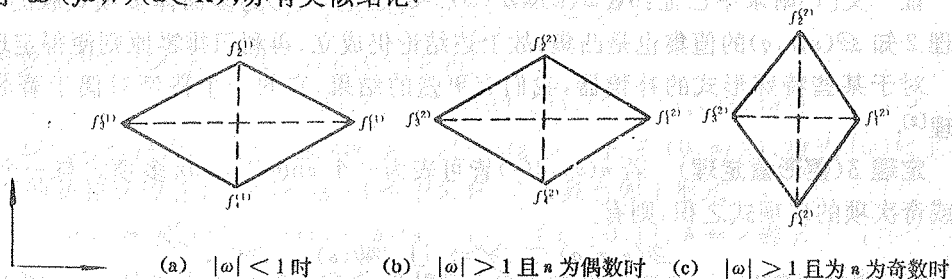
$$\mathcal{L}[q_1, q_2] = \lambda q_1(s) + (1 - \lambda)q_2(s), \quad \lambda \in [0, 1].$$

则定义 ($l=1, 2$)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k^{\mathcal{V}}(s) &= \{\mathcal{L}[f_{i_1}, f_{i_2}]: (i_1, i_2) = (1, 2), (3, 4), (2, 3), (4, 1)\}, \\ \mathcal{D}_k^{\mathcal{V}}(s) &= \{\mathcal{L}[g_{j_1}, g_{j_2}]: (j_1, j_2) = (1, 2), (3, 4), (2, 3), (4, 1)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

引理 1^[8] 值集 $\mathcal{N}(j\omega, r) (\omega \in \mathbb{R})$ 为复平面上对角线分别平行于坐标轴的菱形. 当 $|\omega| \leq 1$ 时, 其暴露棱边为 $\mathcal{N}_k^{(1)}(s)$, 顶点为 $\mathcal{N}_k^{(1)}(s)$; 当 $|\omega| > 1$ 时, 其暴露棱边为 $\mathcal{N}_k^{(2)}(s)$, 顶点为 $\mathcal{N}_k^{(2)}(s)$; 且相对位置如图 1.

对于 $\mathcal{D}(j\omega, r) (\omega \in \mathbb{R})$, 亦有类似结论.

图 1 $\mathcal{N}(j\omega, r)$ 在不同情形下的形状

设补偿器 $c(s)$ 为正则有理传函 $c(s) = n(s)/d(s)$, 则闭环系统的特征多项式族为

$$\mathcal{Q}(s, r, q) = n(s)\mathcal{N}(s, r) + d(s)\mathcal{D}(s, q). \quad (4)$$

为考察 $\mathcal{Q}(s, r, q)$ 的值集, 定义

$$\mathcal{Q}_k^{\mathcal{V}}(s) = \{n(s)\mathcal{N}_k^{\mathcal{V}}(s) + d(s)\mathcal{D}_k^{\mathcal{V}}(s)\} \cup \{n(s)\mathcal{N}_k^{\mathcal{V}}(s) + d(s)\mathcal{D}_k^{\mathcal{V}}(s)\}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_k^{\mathcal{V}}(s) &= \{n(s)\mathcal{N}_k^{\mathcal{V}}(s) + d(s)\mathcal{D}_k^{\mathcal{V}}(s)\} \\ &= \{p_{i_1 i_2}^{(l)}: p_{i_1 i_2}^{(l)} = n(s)f_{i_1}^{(l)}(s) + d(s)g_{i_2}^{(l)}(s), i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4\}, \end{aligned} \quad (6)$$

易见 $\mathcal{Q}_k^{\mathcal{V}}$ 与 $\mathcal{Q}_k^{\mathcal{V}}$ 分别包含 32 条棱边多项式与 16 个顶点多项式, $l=1, 2$.

为方便起见, 以 $\mathcal{E}[\cdot]$ 表示多项式族的棱边, 以 $\mathcal{H}$ 表示 Hurwitz 多项式集合.

引理 2 当 $|\omega| \leq 1$ 时, $\mathcal{E}[\mathcal{Q}(j\omega, r, q)] \subset \mathcal{E}[\mathcal{Q}_k^{\mathcal{V}}(j\omega)]$; 当 $|\omega| \geq 1$ 时, $\mathcal{E}[\mathcal{Q}(j\omega, r, q)] \subset \mathcal{E}[\mathcal{Q}_k^{\mathcal{V}}(j\omega)]$.

证 注意到对给定 $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(j\omega, r)$ 与 $\mathcal{D}(j\omega, q)$ 为相似的菱形, 故 $\mathcal{D}(j\omega, r, q)$ 为凸集
的直和, 仍为凸集^[1], 仿照文[3]的 Lemma 的证明思想定理便得证.

若多项式 $q(s)$ 的所有根部在闭右半平面, 则称它是 anti-Hurwitz 的.

引理 3^[4] 设

$$h(s, \lambda) = h_0(s) + \lambda h^+(s) h_1(s)(\alpha s + \beta), \quad \lambda \in [0, 1].$$

其中 $h_0(s) \in \mathcal{H}$, $h^+(s)$ 为 anti-Hurwitz 的, $h_1(s)$ 为仅含偶次或奇次项的多项式, 并设 $h(s, \lambda)$ 最高阶系数恒正, 则

$$h(s, \lambda) \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in [0, 1] \Leftrightarrow h(s, 0), h(s, 1) \in \mathcal{H}.$$

证 可参考文[4]定理 1.

3 主要结果

定理 1 $\mathcal{D}(s, r, q) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow \bigcup_{l=1,2} \mathcal{D}_l^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H}.$

证 必要性显然. 充分性由引理 2 与排零原理可得.

定理 1 给出了对于一般的补偿器 $c(s)$, 闭环系统的鲁棒稳定性条件, 指出只要检验 64 条棱边的稳定性就可确定此不确定系统的稳定性.

利用文[7]的结论可得较易使用的算法. 记 $p_l(s)$ 为 (6) 式中定义的 32 个顶点多项式 ($l=1, 2$), $R_l(\omega)$ 与 $I_l(\omega)$ 分别为 $P_l(j\omega)$ 的实、虚部, 按文7~(11)式定义测试函数 $F(\omega)$.

定理 2 设存在 $p_0(s) \in \mathcal{D}(s, r, q)$, $p_0(s) \in \mathcal{H}$, 则有

$$\mathcal{D}(s, r, q) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow F(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

证 文[7]附录中已证: $0 \notin \Omega(\omega) \Leftrightarrow F(\omega) > 0$, 这里 $\Omega(\omega)$ 为多面体多项式族的值集. 由引理 2 知 $\mathcal{D}(s, r, q)$ 的值集也是凸集, 故上述结论仍成立, 再利用排零原则便得定理.

对于某些特殊形式的补偿器, 我们有更强的结果, 它的一个特例对偶于著名的 Box 定理^[2].

定理 3(菱形盒定理) 若 $n(s), d(s)$ 皆可表为一个 anti-Hurwitz 多项式与一个仅含偶次或奇次项的多项式之积, 则有

$$\mathcal{D}(s, r, q) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow \bigcup_{l=1,2} \mathcal{D}_l^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H}.$$

证 只证 $\mathcal{D}_l^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{D}_l^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H}, \quad l=1, 2.$

必要性显然.

充分性 仅就 $l=1$ 证明. 设 $\mathcal{D}_1^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H}, \forall p(s) \in \mathcal{D}_1^{\mathcal{W}}(s)$, 不妨设

$$p(s) = n(s)f_1^{(1)}(s) + d(s)[\mu g_1^{(1)}(s) + (1-\mu)g_2^{(1)}(s)],$$

即

$$p(s) = nf_1^{(1)}(s) + dg_2^{(1)}(s) + \mu d(s)(r - rs), \quad \mu \in [0, 1].$$

这里 $nf_1^{(1)} + dg_2^{(1)} = p_1^{(1)}(s) \in \mathcal{D}_1^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H}$, $d(s)$ 满足引理 3 条件, 由引理 3 可得 $p(s) \in \mathcal{H}, \mu \in [0, 1]$. 故 $\mathcal{D}_1^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{D}_1^{\mathcal{W}}(s) \subset \mathcal{H}$. 类似可证 $l=2$ 时. 证毕.

定理 3 在理论上是有益的, 它将 $\mathcal{D}(s, r, q)$ 的稳定性归结到 32 个顶点多项式的稳定性.

利用文[8]的结果, 我们还可给出顶点类型结果成立时, $n(s), d(s)$ 应满足的一个系数

条件.

设

$$\tilde{n}_1(s) = n(s)(s+1), \quad \tilde{d}_1(s) = d(s)(s+1),$$

$$\tilde{n}_2(s) = n(s)(s-1), \quad \tilde{d}_2(s) = d(s)(s-1).$$

定理 4 若 $\tilde{n}_i(s), \tilde{d}_i(s) (i=1,2)$ 满足 Extended AHMC 条件^[8], 则有

$$\mathcal{D}(s, r, q) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow \bigcup_{l=1,2} \mathcal{D}^l(s) \subset \mathcal{H}.$$

证 类似于定理 3 的证明, 只证 $\mathcal{D}^l(s) \subset \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{D}^l(s) \subset \mathcal{H}, l=1,2$. 仅就 $l=1$ 说明. $\forall p(s) \in \mathcal{D}^1(s)$, 则 $p(s)$ 具有如下形式

$$p_{i_1 i_2}^{(1)}(s) + \lambda r n(s)(s+1)$$

或

$$p_{i_1 i_2}^{(1)}(s) + \lambda r d(s)(s+1), \quad \lambda \in [0,1].$$

再根据文[8]的主要结果定理得证.

文[1]给出了一阶补偿器鲁棒镇定区间对象族的判别准则, 指出闭环系统的稳定性可由它的至多 16 个顶点多项式确定. 由于菱形对象族的复杂性, 类似的结果是不存在的. 但对于一阶超前、滞后补偿器与 PI 控制器, 需要检验的“关键”棱边可以大大减少. 下面以超前补偿器为例进行说明.

设 $c(s) = k(s-z)/(s-p), k>0, p<z<0$. 闭环特征函数族为

$$\mathcal{D}(s, r, q) = k(s-z)\mathcal{N}(s, r) + (s-p)\mathcal{D}(s, q).$$

而当 n, m 奇偶性不同时, $|\omega|>1$ 时值集的形状有差异, 下面以 n, m 都为偶数为例.

定理 5 对一阶超前补偿器, 则有

$$\mathcal{D}(s, r, q) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow \bigcup_{l=1,2} \mathcal{L}^{(l)} \subset \mathcal{H}.$$

其中棱边集 $\mathcal{L}^{(l)} = \{\mathcal{L}[p_{i_1 i_2}^{(l)}, p_{i_1 i_2}^{(l)}] : (i_1 i_2, k_1 k_2) \in A_1\}$, 而

$$A_1 = \{(11, 12), (13, 23), (12, 22), (33, 34), (31, 41), (34, 44)\}.$$

证 $\mathcal{D}(j\omega, r, q)$ 为八边形, 且 $\arg\{j\omega - z\} - \arg\{j\omega - p\} \in (0, \pi/2)$, 故当 $|\omega|<1$ 与 $|\omega|>1$ 时的暴露棱边各有 12 条, 这 24 条中又有 12 条具有如下形式

$$p(s) = p_{i_1 i_2}^{(1)}(s) + \lambda r k(s-h)(s-1), \quad \lambda \in [0,1], \quad h = z \text{ 或 } p.$$

由引理 3 知, 它们的顶点多项式的稳定性可保证棱边族的稳定性, 故只需检验剩下的 12 条棱边(它们包含了全部顶点多项式).

类似地可证: 对于其他情形的超前补偿器与滞后补偿器, 需要检验的关键棱边也是 12 条, 但与定理 5 中的不尽相同.

由文[1]的一个结论: 设 $c(s) = \pm(s-a)/(s+a), a>0$. 若 $c(s)$ 可鲁棒镇定 $\mathcal{D}(s, r, q)$, 则 $\|\mathcal{D}(s, r, q)\|_{\infty} < 1$. 我们可得推广的鲁棒小增益定理.

定理 6 $\|\mathcal{D}(s, r, q)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \left\| \frac{\mathcal{N}^{\mathcal{D}}(s)}{\mathcal{D}_k^{\mathcal{D}}(s)} \right\|_{\infty} < 1, \quad l=1,2.$

证 $c(s)$ 鲁棒镇定 $\mathcal{D}(s, r, q)$ 当且仅当它镇定 64 条棱边, 其中有 32 条具有如下形式

$$p(s) = p_{i_1 i_2}^{(l)}(s) + \lambda r (s-a)(s-1), \quad i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4, \quad l = 1, 2, \quad \lambda \in [0,1].$$

而由引理 3 知它们的稳定性可由其顶点的稳定性保证, 仿定理 5 的证明及文[1]的结论便得定理.

4 结束语

本文得到了具有补偿器的菱形对象族的鲁棒稳定性条件. 对于具有非结构性摄动的菱形对象族, 还给出了鲁棒性小增益原理. 本文的方法还可用于研究菱形对象族的其它鲁棒问题, 对于补偿器的设计也是有益的.

参 考 文 献

- [1] Barmish, B. R. et al. Extreme Point Results for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensators. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37:707—714
- [2] Chapellat, H. and Bhattacharyya, S. P.. A Generation of Kharitonov's Theorem; Robust Stability of Interval Plants. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34:306—311
- [3] Tesi, A. et al.. Frequency Response of Interval Plant-Controller Families. Sys. & Contr. Lett., 1992, 18:347—354
- [4] Kraus, F. J. et al.. Robust Stability of Control Systems; Extreme Point Results for the Stability of Edges. J. of Contr., 1992, 5:1039—1051
- [5] Tempo, R.. A Dual Results to Kharitonov's Theorem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35:195—198
- [6] 郭磊, 赵克友. 零点位于左扇区的多项式菱形族. 控制理论与应用, 1993, 10(4): 479—483
- [7] 唐建国, 黄家英. 一类多项式族的 D 鲁棒稳定性分析. 控制理论与应用, 1992, 9(5): 474—480
- [8] Barmish, B. R. and Kang, H. I.. Extreme Point Results for Stability of Interval Plants; Beyond First Order Compensators. Automatica, 1992, 28(6): 1169—1180

Robust Stabilization of Diamond Plants with Compensators

GUO Lei

(Department of Mathematics, Qingdao University • Qingdao, 266071, PRC)

ZHAO Keyou

(Department of Electrical Engineering, Qingdao University • Qingdao, 266071, PRC)

Abstract: This paper presents robust stabilization criteria for a kind of structured uncertain systems——families of diamond plants. We prove that a compensator $c(s)$ robustly stabilizes a diamond plant if and only if $c(s)$ stabilizes all of edge plants, and in some special cases it is sufficient and necessary to stabilize all of extreme plants. About one order compensators we give the critical edge plants (≤ 24) and extreme plants. Our results make it possible to carry out a control synthesis via computer graphics. And methods in this paper can deal with other robustness problems.

Key words: robustness; stabilization; uncertain system

本文作者简介

郭磊 见本刊 1994 年第 1 期第 83 页.

赵克友 见本刊 1994 年第 1 期第 83 页.