第 11 卷第 6 期
1994 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 6
Dec., 1994

人口系统迁移过程的参数辨识及其仿真

姚志强　　　　胡启迪
(福建师范大学数学系·福州，350007)　(上海高教局，200000)

摘要：本文以系统辨识为工具，提出了迁移过程定量研究的一种方法，即运用随机牛顿法于时变系统中以辨识模型迁移表参量，同时结合卡尔曼滤波技术辨识迁移过程中另一参数——总和迁移率，将这两者融为一体，形成了辨识迁移模型参量的递推算法. 本文又借助微分方程的稳定性理论讨论了净迁移情形下的辨识算法的收敛性，给出算法收敛的一个充分条件.

关键词：总和迁入率；总和迁出率；迁移模式；模型迁移表

1 引　　言

人口系统常用的离散模型为[1]

$$X(t+1) = [\Gamma(t) + \beta(t)B(t)]X(t) + g(t). \tag{1.1}$$

其中 $X(t)=[x_0(t),x_1(t),\cdots,x_m(t)]^{\mathrm{T}}$ 为人口状态向量，$x_i(t)$ 为 t 年满 i 岁而不足 $i+1$ 周岁的人口数（以下简称 i 岁），$i=0,1,\cdots,m-1$，m 为最高年龄：

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-\mu_0(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu_1(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\mu_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

为人口状态转移阵，$\mu_i(t)$ 为 t 年 i 岁人口的前向死亡率；

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_{a_1}(t) & \cdots & b_{a_2}(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

为生育矩阵，　$b_i(t) = (1-\mu_{00}(t))k_i(t)l_i(t),\quad i = a_1, \cdots, a_2,$

$\mu_{00}(t)$，$k_i(t)$，$l_i(t)$ 分别为 t 年的婴儿死亡率、女性比、生育模式，a_1，a_2 为育龄妇女上、下限：

$$g(t) = [g_{00}(t), g_0(t), \cdots, g_{m-1}(t)]$$

为净迁入向量，$g_{00}(t)$ 为 t 至 $t+1$ 年内婴儿迁入数，$g_i(t)$ 为 t 至 $t+1$ 年内 i 岁人口迁入数.

$\beta(t)$ 为 t 年总和生育数；

以前我国在人口系统控制过程中，一般不考虑迁移项 $g(t)$，只考虑人口自然变动的情况，因为迁移是相当复杂的过程，很难由机理推得模式，特别目前在我国，还受到政策因素

本文于1993年9月15日收到. 1994年5月10日收到修改稿.

的影响，因此控制妇女总和生育率成为调节人口状态的唯一手段. 但随着经济的发展、人口流动量的增大，排除迁移项，将大大影响人口分析、经济分析的准确性和可靠性. 况且对人口迁移问题的研究，应从以往较多见的定性分析提上定量分析的日程. 文[2]曾通过对局部地区的抽样调查，研究了迁移模式. 文[3]把总和迁移率连同总和生育率作为控制变量，讨论了含迁移因素人口系统的最优控制问题，1990 年的第四次人口普查，适应人口与经济的发展，增加了迁移项的普查内容，这也为人口迁移的定量分析提供了基础.

2 问题的数学描述

人口系统的迁移模型可描述为

$$g(t) = \eta(t)\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix} X(t) + e(t). \tag{2.1}$$

其中 t 为时间变量，$X(t)$为人口状态向量，$\eta(t)$为总和迁入(出)率，$e(t)$为统计误差，$h_i(t)$为迁移模式：

$$\sum_{i=0}^{m-1} h_i(t) = 1, \quad t = 0,1,2,\cdots. \tag{2.2}$$

且据文[4]，迁移模式描述为模型迁移表，即

$$\begin{aligned} h_i(t) = & a_1\exp(-\alpha_1) + a_2\exp(-\alpha_2(i-\gamma_2) - \exp(-\lambda_2(i-\gamma_2))) \\ & + a_3\exp(-\alpha_3(i-\gamma_3) - \exp(-\lambda_3(i-\gamma_3))) + a_4. \end{aligned} \tag{2.3}$$

i 为年龄($i=0,1,\cdots,m-1$).

参数向量记为

$$\theta(t) = (a_1,\alpha_1,a_2,\alpha_2,\gamma_2,\lambda_2,a_3,\alpha_3,\gamma_3,\lambda_3,a_4).$$

这样(2.1)～(2.3)写成

$$g(t) = M(t,\theta(t))\eta(t)X(t) + e(t). \tag{2.4}$$

其中

$$M(t,\theta(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0(t,\theta(t)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1(t,\theta(t)) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{m-1}(t,\theta(t)) & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

称为迁移模式阵.

假定统计误差 $e(t)$是均值为零、方差为 $r(t)$的白噪声序列，即

$$E[e(t)] = 0, \quad \mathrm{cov}[e(t),e(\tau)] = r(t)\delta_{t\tau}.$$

我们的问题是：如何依据输入输出数据 $Z_t=\{g(0),g(1),\cdots,g(t),X(0),X(1),\cdots,X(t)\}$，对时变参数 $\eta(t)$和 $\theta(t)$进行辨识？

3 参数的辨识算法

设 $\eta(t)$的变化服从随机游动模型[5]，即

$$\eta(t+1) = \eta(t) + w(t). \tag{3.1}$$

其中 $w(t)$带时变均值 $q(t)$和方差 $Q(t)$白噪声序列，即

$$E[w(t)] = q(t), \quad E[w(t),w(\tau)] = Q(t)\delta_{t\tau}.$$

参数的辨识算法分两步给出：

1) $\theta(t)$已知时，对 $\eta(t)$的估计：

根据 Kalman 滤波思想[6]及 Yoshimura 等提出的处理方法[7,8]，得到 $\eta(t)$的递推算法：

$$\hat{\eta}(t+1) = \hat{\eta}(t+1|t) + K(t+1)\varepsilon(t+1), \tag{3.2}$$

$$\hat{\eta}(t+1|t) = \hat{\eta}(t) + \hat{q}(t), \tag{3.3}$$

$$\varepsilon(t+1) = g(t+1) - H^{\mathrm{T}}(t+1,\hat{\theta}(t))\hat{\eta}(t+1|t), \tag{3.4}$$

$$K(t+1) = P(t+1|t)H^{\mathrm{T}}(t+1,\hat{\theta}(t)) \cdot [H(t+1,\hat{\theta}(t))P(t+1|t)H^{\mathrm{T}}(t+1,\hat{\theta}(t)) + \hat{r}(t+1)]^{-1}, \tag{3.5}$$

$$P(t+1|t) = P(t) + \hat{Q}(t), \tag{3.6}$$

$$P(t+1) = [1 - K(t+1)H(t+1,\hat{\theta}(t))]P(t+1|t), \tag{3.7}$$

$$\hat{q}(t+1) = \hat{q}(t) + d(t)\hat{Q}(t)P^{-1}(t+1|t)K(t+1)\varepsilon(t+1), \tag{3.8}$$

$$\hat{Q}(t+1) = (1-d(t))\hat{Q}(t) + d(t)[K(t+1)\varepsilon(t+1)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1)K^{\mathrm{T}}(t+1) + P(t+1) - P(t)], \tag{3.9}$$

$$\hat{r}(t+1) = (1-d(t))\hat{r}(t) + d(t)\varepsilon(t+1)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1). \tag{3.10}$$

其中 $$d(t) = (1+b+\cdots+b^{t})^{-1} = (1-b)/(1-b^{t+1}).$$

$0<b<1$ 为遗忘因子.

2) $\eta(t)$为已知时，对 $\theta(t)$的估计：

根据随机牛顿法[8]思想，可以递推估计参数 $\theta(t)$：

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \rho(t)R^{-1}(t)\nabla_{\theta}H^{\mathrm{T}}(t,\hat{\theta}(t-1))\hat{\eta}(t)[g(t) - H(t,\hat{\theta}(t-1))\hat{\eta}(t)],$$

$$R(t) = R(t-1) + \rho(t)[\nabla_{\theta}H^{\mathrm{T}}(t,\hat{\theta}(t-1))[\nabla_{\theta}H^{\mathrm{T}}(t,\hat{\theta}(t-1))]^{\mathrm{T}}\hat{\eta}^2(t) - R(t-1)]. \tag{3.11}$$

其中 $$\nabla H(t,\hat{\theta}(t-1)) = \left.\frac{\mathrm{d}H^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}(t-1)}$$

为 H 关于 θ 的梯度；$\rho(t)$为收敛因子，满足：

$$\begin{aligned} &0 < \rho(t) < 1, \quad \forall\, t \\ &\lim_{t\to\infty}\rho(t) = \rho_0, \\ &\sum_{t=1}^{\infty}\rho(t) = \infty, \\ &\sum_{t=1}^{\infty}\rho^2(t) < \infty. \end{aligned} \tag{3.12}$$

参数辨识算法同时包括 Kalman 滤波和参数辨识两部分内容，两者互为迭代关系. Kalman 滤波为参数辨识器提供输出预报误差 $g(t)-H(t,\hat{\theta}(t-1))\hat{\eta}(t)$；反之，参数辨识器又为 Kaiman 滤波器提供模型参数估计值 $\hat{\theta}(t)$. 这将为同时进行状态估计和参数辨识提供一种有效的计算方法.

4 辨识算法的实现问题

上述辨识算法看起来非常复杂，尤其是输出预报误差关于参数 θ 的梯度计算，但对给

定的迁移模式阵(2.5)，具有特殊的结构，算法较为简单，然而这一算法又涉及矩阵求逆运算，这将给算法的实现带来许多不便. 因此，需要解决(3.5)及(3.11)式的求逆运算. 由于(3.11)式中方阵 $R(t)$ 的阶数与 $\theta(t)$ 的维数相同，因此 $R(t)$ 属于低阶求逆问题，但(3.5)中是高阶方阵求逆，计算量较大，我们利用矩阵反演公式，化为另一种不含高阶矩阵逆运算的等价形式：

$$\hat{\eta}(t+1)=\hat{\eta}(t+1|t)+K(t+1)\varepsilon(t+1), \tag{3.2'}$$

$$\hat{\eta}(t+1|t)=\hat{\eta}(t)+\hat{q}(t), \tag{3.3'}$$

$$\varepsilon(t+1)=g(t+1)-H(t+1,\hat{\theta}(t))\hat{\eta}(t+1|t), \tag{3.4'}$$

$$K(t+1)=P(t+1)H^{\mathrm{T}}(t+1,\hat{\theta}(t))\mathscr{L}(t+1), \tag{3.5'}$$

$$P(t+1|t)=P(t)+\hat{Q}(t), \tag{3.6'}$$

$$P^{-1}(t+1)=P^{-1}(t+1|t)+H^{\mathrm{T}}(t+1,\hat{\theta}(t))\mathscr{L}(t+1)H(t+1,\hat{\theta}(t)), \tag{3.7'}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q}(t+1)=&(1-d(t))\hat{Q}(t)\\&+d(t)[K(t+1)\varepsilon(t+1)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1)K^{\mathrm{T}}(\varepsilon+1)+P(t+1)-P(t)],\end{aligned} \tag{3.8'}$$

$$\hat{q}(t+1)=\hat{q}(t)+d(t)\hat{Q}(t)P^{-1}(t+1|t)K(t+1)\varepsilon(t+1), \tag{3.9'}$$

$$\mathscr{L}(t+1)=\frac{1}{1-d(t)}\left[\mathscr{L}(t)-\frac{\mathscr{L}(t)\varepsilon(t+1)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1)\mathscr{L}(t)}{\frac{1-d(t)}{d(t)}+\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1)\mathscr{L}(t)\varepsilon(t+1)}\right]. \tag{3.10'}$$

这组等价算法避免了高阶方阵求逆运算，更易于在计算机上实现. 在仿真时，需要预先选定初始状态

$$\hat{\theta}(0),\ \hat{\eta}(0),\ P(0),\ L(0),\ R(0),\ \hat{r}(0),\ \hat{q}(0),\ \hat{Q}(0).$$

5　收敛性分析

这里只考虑净迁移情形的收敛性.

人口动态系统

$$X(t+1)=[\Gamma(t)+\beta(t)B(t)]X(t)+\eta(t)\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\h_0(t,\theta(t))&0&\cdots&0&0\\0&h_1(t,\theta(t))&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&h_{m-1}(t,\theta(t))&0\end{bmatrix}X(t)+e(t). \tag{5.1}$$

其中 $\eta(t)$ 为总和净迁入率；$\Gamma(t),\beta(t),B(t),X(t)$ 参见(1.1)，$h_i(t,\theta(t))$ 参见(2.3).

将(5.1)右边第一项移到左边，并令

$$g(t)=X(t+1)-(\Gamma+\beta B)X(t),$$

它为净迁入向量.

由(2.5)，得等价的系统

$$g(t)=\eta(t)M(t,\theta(t))X(t)+e(t). \tag{5.1'}$$

简记

$$g(t)=f(t,\theta(t))+e(t). \tag{5.2}$$

设 f 关于参量 $\theta(t)$ 的偏导存在且连续，$e(t)$ 为零均值的白噪声序列. 时变参量估计的

递推算法为：

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+\rho(t)R^{-1}(t)\nabla_{\theta}f^{T}(t,\hat{\theta}(t-1))[g(t)-f(t,\hat{\theta}(t-1))],$$
$$R(t)=R(t-1)+\rho(t)[\nabla_{\theta}f^{T}(t,\hat{\theta}(t-1))[\nabla_{\theta}f^{T}(t,\hat{\theta}(t-1))]^{T}-R(t-1)]. \tag{5.3}$$

为分析上述递推算法的收敛性，先说明一个引理.

引理 1 考察系统(5.1)，设 $A=\Gamma+\beta B+\eta M$，则 A 的特征值严格在单位圆内的充分必要条件为 $\beta<\beta_r$. 这里

$$\beta_r=[b_{a_1}(1-\mu_0+\eta h_0)\cdots(1-\mu_{a_1-1}+\eta h_{a_1-1})+\cdots+b_{a_2}(1-\mu_0+\eta h_0)\cdots(1-\mu_{a_2-1}+\eta h_{a_2-1})]^{-1}.$$

在引理 1 的基础上讨论下列慢时变系统关于递推算法(5.3)的收敛性：

定理 假定(5.1)或(5.1′)为慢时变系统，即

$$\sum_{t=1}^{\infty}\|\theta(t)-\theta(t-1)\|<\infty.$$

取 $\rho(t)=1/t$，且设 $a_i\leqslant d_i$，d_i 为给定的常数($i=1,2,3,4$)；若

$$\beta(t)<\beta_r(t),$$

则递推算法(5.3)的参数估计值 $\theta(t)$ 以概率 1 收敛于某个常值 θ_0. 其中

$$\beta_r(t)=[b_{a_1}(1-\mu_0+\eta d)\cdots(1-\mu_{a_1-1}+\eta d)+\cdots+b_{a_2}(1-\mu_0+\eta d)\cdots(1-\mu_{a_2-1}+\eta d)]^{-1},$$

$$d=\sum_{i=1}^{4}d_i.$$

η 为总和净迁移率.

我们采用微分方程的稳定性理论来证明定理. 限于篇幅，证明内容略去.

6 仿 真

1) 数据处理：

本文得到的原始统计数据是：

1° 人口普查关于迁移的数据：

1982 年及 1990 年上海市区、郊区人口年龄构成数据；

1985 年 7 月至 1990 年 7 月五年按因迁入上海市区、郊区的年龄构成；

2° 1985 年公安局统计的上海市区、郊区人口分性别年龄构成；

3° 1981 至 1990 年上海市区、郊区的迁入、迁出总数；

4° 1981 至 1990 年上海市区、郊区婴儿出生总数.

为直接用于辨识，必须作预处理：

第一步：统一统计时刻及口径；

第二步：将 1981 至 1989 年各年的迁入迁出总数按适当比例[2,9]，分解成迁入、迁出年龄构成；

第三步：按分龄留存率推算 1981 至 1989 年各年年末的人口状态.

需要指出的是：1) 分解数据的"比例"是参照文[2,9]中抽样调查的结果，所以说这样处理数据既具客观性又有主观性，但主观的一面并不影响辨识算法的收敛性； 2) 分龄留

存率是采用文[10]中 1982 年及 1990 年生命表制作过成中得到的；3）1985 年至 1990 年的按龄迁移数是从第四次普查数据处理的.

这样经过处理的用于辨识的数据：

① $X(t), t=0,1,\cdots,8$，是 t 年年末人口年龄构成及普查的人口年龄构成；

② $g(t), t=0,1,2,\cdots,8$，分别迁入、迁出市区、郊区的人口年龄构成及普查的迁移人口年龄构成.

2）辨识结果及分析

经计算机仿真，将辨识结果列成表，本文摘选表 1，表 2 及部分仿真图（其中实线表示系统真实按龄迁移数，虚线表示由辨识出的参数得到的按龄迁移状况）供参考. 分析结果表明，本文所给出的算法递推算法具有相当的可行性、较高的准确性和较好的收敛性.

表 1　市区迁入模型参数

参数 \ 年份	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
$\eta(t)$	1.804	1.624	1.547	1.597	1.428	1.59	1.46	1.65	1.18
a_1	0.0053	0.0054	0.0059	0.0058	0.0079	0.0062	0.0052	0.0058	0.0073
α_1	0.0297	0.0296	0.0280	0.0280	0.050	0.056	0.049	0.0059	0.0041
a_2	0.086	0.083	0.092	0.091	0.071	0.073	0.072	0.096	0.056
α_2	0.34	0.35	0.35	0.363	0.75	0.74	0.74	0.73	0.73
γ_2	19.4	19.3	19.18	18.89	21.7	22.4	23.4	24.5	22.4
λ_2	0.183	0.180	0.160	0.191	0.33	0.33	0.32	0.317	0.326
a_3									
α_3									
γ_3									
λ_3									
a_4	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0001	0.0003	0.0002	0.0002

表 2　1985 年 7 月至 1990 年 7 月五年市区男性按因迁入模型参数

参数 \ 原因	工作调动	分配录用	务工经商	学习培训	投亲靠友
η	1.067	0.513	2.371	1.27	0.99
a_1	0.0008	0.0010	0.0005	0.0004	0.0092
α_1	0.0084	−0.0044	0.0004	0.0006	−0.0001
a_2	0.157	0.169	0.209	0.143	0.197
α_2	0.233	0.275	0.163	0.271	0.305
γ_2	18.2	23.35	20.1	18.9	15.2
λ_2	0.256	0.312	0.308	0.301	0.312
a_3	0.101				0.0012
α_3	0.125				0.056
γ_3	35.6				40.0
λ_3	0.250				0.125
a_4	0.0005	0.000	0.000	0.000	0.000

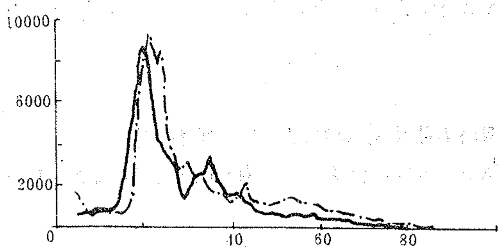

图 1 1987年迁入市区的人口年龄构成

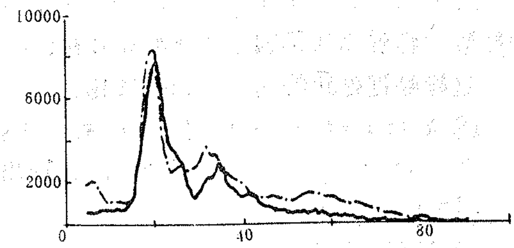

图 2 1989年迁入市区的人口年龄构成

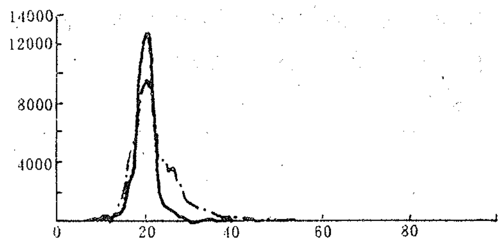

图 3 1985年7月至1990年7月因学习培训而迁入市区的男性人口年龄构成

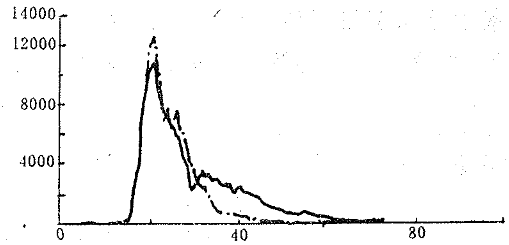

图 4 1985年7月至1990年7月因务工经商而迁入市区的男性人口年龄构成

3）在人口预测上的应用

我们可以在辨识的基础上，以 $\beta(t)$、总和迁入率 $\eta^I(t)$、总和迁出率 $\eta^0(t)$ 为控制参数，对人口状态作中、长期预测，并予以分析，以便在人口决策上作适当的调整.

参 考 文 献

[1] Song Jian, Yu Jingyuan and Tuan ChiHsien. Population Control in China. CBS Educational and Professional Publishing, New York, 1985

[2] Hu Qidi, Yang Qingzhong, Gui Shixun and Ma Guoxuan. Reaseach on the Population Migration Project Model in the Urban District of Shanghai. Proceedings of the IFAC Workshop on Modeling Decision and Game with Application to Social Phenomena, 1986, 2:163—172

[3] 朱刚，胡启迪，杨庆中. 含迁移因素的人口系统的最优控制. 控制理论及其应用年会，杭州，1990

[4] Rogers, A.. Migration Patterns and Population, Institute for Application Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1981

[5] L. Ljung 著，袁震东，阮荣耀，陈树中译. 系统辨识——使用者的理论，上海：华东师范大学出版社，1988

[6] 中国科学院数学所概率组等. 离散时间系统滤波的数学方法. 北京：国防工业出版社，1986

[7] Yoshimura, T. and Soeda, T.. A Technique for Compensating the Filter Performance by Fictious Noise. Trans. ASME, 1978, 100:154—156

[8] 邓自立，郭一新. 油田产油量产水量动态预报. 自动化学报，1983，9(2)：121—125

[9] 王维志. 中国74市镇迁移人口构成的初步分析. 人口与经济，1988，(3)：11—16

[10] 胡启迪，杨庆中，姚志强，郑长明. 从若干数理人口指标看上海人口系统的演化特征. 上海市第四次人口普查资料分析，1991，(1)：267—281

On the Time-Varying Parameters Identification of Migration Process in the Population Dynamics and Its Simulation

YAO Zhiqiang

(Department of Methematics, Fujian Normal University • Fujian, 350007, PRC)

HU Qidi

(Shanghai Higher Educational Office • Shanghai, 20000, PRC)

Abstract: In this paper the identification algorithm is given for the time-varying parameters of the migration process in the population dynamics. The parameters in model migration schedules are identified by the stochastic Newton method and total migration rate by Kalman filtering. We connected together the stochastic Newton method with the Kalman filtering to form a recursive algorithm. And it is studied the convergence problem of the algorithm in the case of net migration with the aid of the stability theory of differential equations.

Key words: total immigration rate; total outmigration rate; migration model; model migration schedule

本文作者简介

姚志强 1967 年生. 1989 年福建师范大学本科毕业, 1989 年至 1992 年于华东师范大学运筹学与控制论专业学习, 现在福建师范大学任教.

胡启迪 华东师范大学教授及前任数学系主任. 现任上海市高教局副局长.