

模糊控制器的绝对稳定性圆判据

卢朝晖 黄道君

(西安电子科技大学电子工程系, 710071)

摘要: 本文给出了连续模糊控制系统 (CFCS) 和采样模糊控制系统 (SDFCS) 中的广义稳定性圆判据, 推导出两种系统中在稳定性意义下的模糊控制器参数选择范围, 在此基础上讨论了 SDFCS 中采样周期、对象参数变化时对稳定性的影响, 仿真结果证实了判据的有效性和实用性。

关键词: 模糊控制; 绝对稳定性; 圆判据; 采样系统; 采样周期

1 引言

对于模糊控制器 (FC) 的稳定性研究, 一直是一个难点。由于 FC 难以用数学模型描述和其中的非线性作用, 导致对它性能的分析相当困难。一般地, 可将 FC 等效为一个多值继电器模型, 用描述函数法研究其稳定性^[1]。但这是一种近似的方法, 要求被控对象有低通特性。

文 [2] 在绝对稳定性基础上, 应用圆判据来研究 CFCS 的稳定性。但常用的 FCS 中的 FC 控制器一般都用计算机实现, 构成图 1 所示

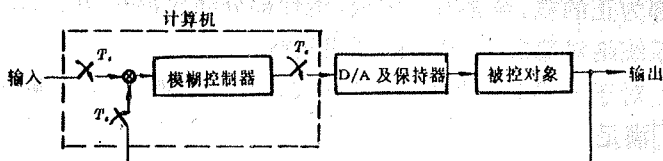


图 1 模糊采样控制系统

的采样控制系统。在 SDFCS 中采样周期必然会影响到系统的稳定性, 所以本文中建立了 SDFCS 中的稳定性圆判据, 并且考察了采样周期 T_s 对稳定性的影响。

2 FCS 的构成

FCS 中, 对于均匀分级的一维 FC, 其控制面如图 2 示, 输出的控制量 du 是增量形式。图 2 表明, FC 特性位于以 0 和 k 为斜率的两条直线之间, 即非线性特性 $du=f(e) \in K[0, k]$ 扇形域, 所以可用绝对稳定性的概念来研究。

由图 2, 设 FC 的量化因子是 $k_e = \frac{m}{2x_e}$, 比例因子是 $k_u = 2x_u/n$, x_e, x_u 是 e 和 du 的基本论域, m, n 分别是模糊化等级数, 则非线性区域上限的斜率 k 为

$$k = \frac{2x_u}{n} \cdot \frac{2x_e}{2m} = 2 \frac{x_u}{x_e} \frac{m}{n} = 2k_e k_u. \quad (1)$$

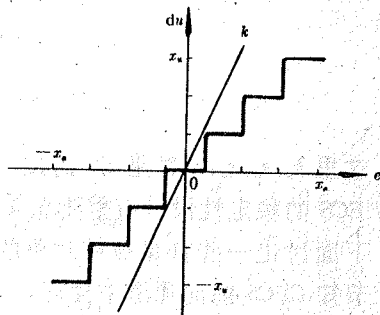
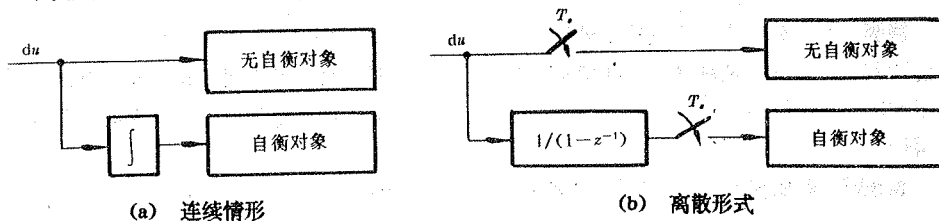


图 2 一维 FC 控制面

一般地,取 e, du 量化分级相同,即 $m=n$,有

$$k = 2 \frac{x_u}{x_e} \quad (2)$$

由于 FC 送出的控制量 du 是增量形式,所以在控制对象不同时有不同的形式,如图 3. 对于自衡对象不含积分环节,所以在控制时要对控制增量 du 进行累积,对无自衡对象则不必累积. 因此在 FCS 的前向通道上一定存在一个积分环节,也就是开环传递函数中含一个 $s=0$ 的极点(离散情形下含一个 $z=1$ 的极点),这个结论在稳定性研究中比较重要.



3 CFCS 中的广义圆判据

这里将说明文[2]中提出的圆判据,并将此判据应用于常见对象,得出满足稳定性条件下的 FC 参数选择范围.

定理 1 非线性系统 $\dot{X} = AX + bf(\sigma)$, $\sigma = C^T X$, $f(\sigma) \in K[0, k]$, 设 A 无纯虚根, A 没有实部为正的根,至多有一零根,线性部分频率特性 $G(j\omega)$ 位于直线 $x = -1/k$ 右方,则非线性系统绝对稳定. 定理 1 的证明从略.

对于一维 FC 满足 $f(e) \in K[0, k]$, 所以使得 CFCS 稳定的最大的非线性扇形域 $K[0, k_{\max}]$ 满足

$$-\frac{1}{k_{\max}} = \min \operatorname{Re}[G(s)], \quad (3)$$

即

$$k_{\max} = -\frac{1}{\min \operatorname{Re}[G(s)]}.$$

又由式(1), (2)可得

$$2k_e k_u \leq -\frac{1}{\min \operatorname{Re}[G(s)]}, \quad (4)$$

或

$$2x_u/x_e \leq -\frac{1}{\min \operatorname{Re}[G(s)]}. \quad (5)$$

这里 k_e, k_u, x_u, x_e 都是 FC 的控制参数, 所以按式(4), (5)选择参数, 可保证稳定性, 这对于 FCS 的稳定性设计有重要意义.

下面讨论一些常见被控对象的频率特性, 求出非线性扇形域 $K[0, k_{\max}]$ 的参数 $k_{\max}$. 由上节知 CFCS 前向通道中含有 $s=0$ 极点, 所以只考察含积分环节的对象.

$$1) G(s) = K/s, \quad \operatorname{Re}[G(s)] = 0, \quad k_{\max} = +\infty.$$

$$2) G(s) = K/s(Ts+1), \quad \operatorname{Re}[G(s)] = -KT/[1+(\omega T)^2],$$

$$\min \operatorname{Re}[G(s)] = -KT, \quad k_{\max} = 1/KT.$$

$$3) G(s) = K/s(T_1s+1)(T_2s+1), \quad \operatorname{Re}[G(s)] = -K(T_1+T_2)/[1+(\omega T_1)^2][1+(\omega T_2)^2], \quad \min \operatorname{Re}[G(s)] = -K(T_1+T_2), \quad k_{\max} = 1/K(T_1+T_2).$$

4 SDFCS 中的圆判据

实际中的 FCS, 常用计算机实现 FC 部分, 属于采样系统. 由节 2 的讨论知 SDFCS 的前向通道上有一个 $z=1$ 的极点, 对于这类系统, 其圆判据是:

定理 2 控制系统由线性部分 $G(s)$ 和非线性部分 $f(e)$ 组成, 非线性部分 $u=f(e)$ 满足 $f(0)=0, 0 < f(e)/e < k, G(z)$ 是采样周期为 T 时的连续传递函数 $G(s)$ 对应的脉冲传函, $G(z)$ 有且仅有一个 $z=1$ 极点, 其它极点位于单位圆内, 整个闭环系统绝对稳定的条件是

$$\operatorname{Re}[G(e^{j\omega T})] > -\frac{1}{k},$$

当 $0 \leq \omega T \leq \pi$ 时, 即 $G(z)$ 的频率特性在 ωT 由 0 变至 π 时都位于直线 $x=-1/k$ 右方. 定理 2 的证明可见文[3].

由上述定理知非线性扇形域 $K[0, k_{\max}]$ 满足

$$k_{\max} = \frac{-1}{\min \operatorname{Re}[G(e^{j\omega T})]}, \quad 0 \leq \omega T \leq \pi.$$

所以只要确定了 $\operatorname{Re}[G(e^{j\omega T})]$, 即可求得 $k_{\max}$, 进一步由式(4), (5)确定 FC 控制参数的选择范围. 为确定 $\min \operatorname{Re}[G(e^{j\omega T})]$, 先叙述以下定理.

定理 3 关于离散对象的频率特性, 有以下性质:

- 1) $\operatorname{Re} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$.
- 2) $\min \operatorname{Re} \frac{-1}{z-b} = \frac{-1}{z-b} \Big|_{z=1}, \quad 1 > b > 0$.
- 3) $\min \operatorname{Re} \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-b} \Big|_{z=-1}, \quad 1 > b > 0$.
- 4) $\operatorname{Re} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{2}$.
- 5) $\min \operatorname{Re} \frac{-z}{z-b} = \frac{-z}{z-b} \Big|_{z=1}, \quad 1 > b > 0$.
- 6) $\min \operatorname{Re} \frac{z}{z-b} = \frac{z}{z-b} \Big|_{z=-1}, \quad 1 > b > 0$.
- 7) $G(z) = \frac{-a_1}{z-b_1} + \frac{a_2}{z-b_2}, \quad 0 < b_1, b_2 < 1, \quad a_1, a_2 > 0$.

则

$$\min \operatorname{Re} G(z) = \min \{G(z) \Big|_{z=1}, G(z) \Big|_{z=-1}, G_{\varphi}\}.$$

G_{φ} 的值是

$$G_{\varphi} = \frac{-a_1(\cos \varphi - b_1)}{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \varphi} + \frac{a_2(\cos \varphi - b_2)}{1 + b_2^2 - 2b_2 \cos \varphi}.$$

其中

$$\cos \varphi = \frac{(1 + b_1^2) \sqrt{a_2 - a_2 b_2^2} - (1 + b_2^2) \sqrt{a_1 - a_1 b_1^2}}{2b_1 \sqrt{a_2 - a_2 b_2^2} - 2b_2 \sqrt{a_1 - a_1 b_1^2}}.$$

当此式得出的 $|\cos \varphi| > 1$ 时, G_{φ} 无意义, 则

$$\min \operatorname{Re} G(z) = \min \{G(z) \Big|_{z=1}, G(z) \Big|_{z=-1}\}.$$

定理 3 的证明较长, 见本文附录.

应用定理 3 讨论一些常见对象的频率特性, 确定对应的 $k_{\max}$. 求脉冲传函 $G(z)$ 时考

虑了零阶保持器.

$$1^\circ G(s) = K/s, \quad G(z) = \frac{KT_s}{z-1}, \quad \operatorname{Re}G(z) = -\frac{KT_s}{2}, \quad k_{\max} = -\frac{1}{KT_s}.$$

当 $T_s \rightarrow 0$ 时 SDFCS 逼近 CFCS, 上述 $k_{\max} \rightarrow +\infty$, 这和 CFCS 时的结论相符合.

$$2^\circ G(z) = K/(Ts + 1), \quad G(z) = K(1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{z-1} - \frac{\exp(-T_s/T)}{z - \exp(-T_s/T)} \right).$$

由节 2 的讨论知对这种对象要对 du 加一个累积环节, 所以等效的被控制对象脉冲传函为

$$\frac{G(z)}{1 - z^{-1}} = \frac{K}{z-1} - \frac{K \exp(-T_s/T)}{z - \exp(-T_s/T)}.$$

又由定理 3 可求得

$$\min \frac{G(z)}{1 - z^{-1}} = -\frac{K}{2} - \frac{K \exp(-T_s/T)}{1 - \exp(-T_s/T)},$$

所以

$$k_{\max} = \frac{2[1 - \exp(-T_s/T)]}{K[1 + \exp(-T_s/T)]}.$$

$$3^\circ G(s) = K/s(1 + Ts), \quad G(z) = \frac{KT_s}{z-1} + \frac{KT[\exp(-T_s/T) - 1]}{z - \exp(-T_s/T)}.$$

同样由定理 3 可求得

$$\min \operatorname{Re}G(z) = -KT_s/2 - KT, \quad k_{\max} = 2/(KT_s + 2KT).$$

当 $T_s \rightarrow 0$ 时, SDFCS 逼近 CFCS, $k_{\max} \rightarrow \frac{1}{KT}$, 也就是逼近 CFCS 时的 $k_{\max}$ 值.

5 采样周期 T_s 对稳定性的影响

考虑对象 $G(s) = K/s$, 其 $k_{\max} = 2/KT_s$, 可以看出 K 增大时或 T_s 增大时 $k_{\max}$ 都减小, 所以 K, T_s 的增大都使得非线性扇形域缩小, 使系统稳定裕量减小, 对稳定性不利.

考虑对象 $G(s) = K/s(1 + Ts)$, 其 $k_{\max} = 2/(KT_s + 2KT)$. 同样 K, T_s 的增大对稳定性不利, 对象时间常数 T 的增大也对稳定性不利.

总之对一般的无自衡对象, K, T 的增大都降低了系统的稳定程度. T_s 增大, 系统稳定程度降低; T_s 越小, 采样系统越接近连续系统, 系统越稳定. 这一结论同人们对采样系统的一般认识是一致的.

考察对象 $G(s) = K/(Ts + 1)$, 由于 SDFCS 须在 du 后加一个累积环节, 相当于改变了对象的结构. 这时 $k_{\max} = 2[1 - \exp(-T_s/T)]/K[1 + \exp(-T_s/T)]$ 又可写成

$$k_{\max} = \frac{2}{K} \left[\frac{2}{1 + \exp(-T_s/T)} - 1 \right].$$

从上式可看出, K, T 增大时 $k_{\max}$ 减小, 对稳定性不利. 但 T_s 增大时, $k_{\max}$ 反而略有增大, 只是增大幅度较小. 可以认为 T_s 变化时, 对 $k_{\max}$ 影响不大, 也就是对稳定性影响不大, 这是一个对自衡对象适用的结论.

6 仿真例子

被控对象 $G(s) = 1/s(s + 1)$, 这一对象在[3]等文献中被多次讨论. 考虑零阶保持后

$$\text{求得} \quad G(z) = \frac{T_s}{z-1} - \frac{1 - \exp(-T_s)}{z - \exp(-T_s)}, \quad k_{\max} = 2/(2 + T_s).$$

采用一维 FC 对其进行控制, 控制界面如图 2, 整个 SDFCS 如图 1.

实验方法是先通过 $k_{\max} = 2/(2+T_s)$ 求得扇形域范围的理论最大值 $k_{\max}$, 而用公式 $k = 2x_n/x_s$ 求出扇形域范围的的实际值. 改变 FC 参数 x_s, x_n , 使 SDFCS 从不振荡向自持振荡变化, 验证在刚发生振荡时的临界值 k 是否与 $k_{\max}$ 吻合.

实验结果, $T_s = 1, k = 0.56$ 时不振荡, $k = 0.6$ 时振荡, 而 $k_{\max} = 0.666$, 结果基本吻合.

如选用对象 $G(s) = 1/s(0.5s+1)$, 这时 $k_{\max} = 2/(1+T_s)$, 同样重复上述实验, 取 $T_s = 1$, 则 $k = 1$ 时不振荡, $k = 1.2$ 时振荡, 而 $k_{\max} = 1$, 结果基本吻合.

7 结 论

文中讨论了 CFCS 和 SDFCS 中的广义圆判据, 据 $\min \operatorname{Re}[G(s)]$ 和 $\min \operatorname{Re}[G(e^{j\omega T_s})]$, 确定了 FC 的非线性特性范围, 进而确定了稳定性要求下 FC 控制参数的选择范围, 这对于 FC 的实用化有重要意义. SDFCS 中影响稳定性的因素众多, 文中对自衡对象、无自衡对象详细讨论了对对象参数和采样周期对稳定性的影响. 采样周期 T_s 的增大对无自衡对象的控制变得易振荡, 对自衡对象的控制影响不大, 这一点作者在仿真实验中也观察到.

SDFCS 中的非线性作用、语言值描述导致对于 FC 的讨论相当困难, 而对于二维 FC 和含滞后对象的稳定性问题, 还需进一步研究.

参 考 文 献

- [1] Kickert, W. J. M. and Mamdani, E. H.. Analysis of A Fuzzy Logic Controller. Int. J. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1), 29-44
- [2] Ray, K. S. and Majumder, D. D.. Application of Circle Criteria for Stability Analysis of Linear SISO and MIMO Systems Associated with Fuzzy Logic Controller. IEEE Tran. on SMC, 1984, SMC-14(2), 345-349
- [3] Jury, E. I. and Lee, B. W.. On the Stability of a Certain Class of Nonlinear Sampled-Data Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1964, AC-9(1), 51-61

附 录

这里选证定理 3 中的 1), 2), 7), 其它亦可用此法证明.

$$1) \operatorname{Re} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{证} \quad \operatorname{Re} \frac{1}{z-1} = \operatorname{Re} \frac{1}{\cos \varphi - 1 + i \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - 1}{2 - 2 \cos \varphi} = -\frac{1}{2}.$$

$$2) \min \operatorname{Re} \frac{-1}{z-b} = \frac{-1}{z-b} \Big|_{z=1}, \quad 0 < b < 1.$$

$$\text{证 令} \quad z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{j\varphi}.$$

$$\text{这里} \quad \varphi = \omega T_s, \quad \frac{-1}{z-b} = \frac{1}{\cos \varphi - b + i \sin \varphi} = G(\varphi),$$

$$\operatorname{Re} G(\varphi) = \frac{-(\cos \varphi - b)}{1 + b^2 - 2b \cos \varphi}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re} G(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{(1 - b^2) \sin \varphi}{(1 + b^2 - 2b \cos \varphi)^2}.$$

$$\text{令} \quad \frac{\partial \operatorname{Re} G(\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \text{ 得 } \sin \varphi = 0.$$

$$\text{即} \quad \cos \varphi = 1 \quad \text{或} \quad \cos \varphi = -1,$$

$$\text{所以} \quad \min \operatorname{Re} G(\varphi) = \min \{ \operatorname{Re} G(\varphi) |_{\cos \varphi = 1}, \operatorname{Re} G(\varphi) |_{\cos \varphi = -1} \}.$$

$$\text{而} \quad \operatorname{Re} G(\varphi) |_{\cos \varphi = 1} = \frac{-1}{z-b} \Big|_{z=1} = \frac{-1}{1-b},$$

显然

所以

即

$$\operatorname{Re} G(\varphi) \big|_{\cos \varphi = -1} = \frac{-1}{z-b} \bigg|_{z=-1} = \frac{1}{b+1}.$$

$$\frac{-1}{1-b} < \frac{1}{b+1},$$

$$\min \operatorname{Re} G(\varphi) = \operatorname{Re} G(\varphi) \big|_{\cos \varphi = 1}.$$

$$\min \operatorname{Re} \frac{-1}{z-b} = \frac{-1}{z-b} \bigg|_{z=1}.$$

$$3) G(z) = \frac{-a_1}{z-b_1} + \frac{a_2}{z-b_2}, \quad 0 < b_1, b_2 < 1, a_1, a_2 > 0, \text{求 } \min \operatorname{Re} G(\varphi).$$

证 令

$$G(\varphi) = G(z) \big|_{z = \cos \varphi + j \sin \varphi},$$

$$\operatorname{Re} G(\varphi) = \frac{-a_1(\cos \varphi - b_1)}{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \varphi} + \frac{a_2(\cos \varphi - b_2)}{1 + b_2^2 - 2b_2 \cos \varphi},$$

同样令 $\frac{\partial \operatorname{Re} G(\varphi)}{\partial \varphi} = 0$ 后, 求得

$$\cos \varphi = 1 \quad \text{或} \quad \cos \varphi = -1.$$

或

$$\cos \varphi = \frac{(1 + b_1^2) \sqrt{a_2 - a_2 b_2^2} - (1 + b_2^2) \sqrt{a_1 - a_1 b_1^2}}{2b_1 \sqrt{a_2 - a_2 b_2^2} - 2b_2 \sqrt{a_1 - a_1 b_1^2}}. \quad (\text{A1})$$

所以

$$\min \operatorname{Re} G(z) = \min \{G(z) \big|_{z=1}, G(z) \big|_{z=-1}, G_\varphi\},$$

$$G_\varphi = \frac{-a_1(\cos \varphi - b_1)}{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \varphi} + \frac{a_2(\cos \varphi - b_2)}{1 + b_2^2 - 2b_2 \cos \varphi}.$$

其中 $\cos \varphi$ 取 A1) 的值. 如果由 A1) 求得的 $|\cos \varphi| > 1$, 则

$$\min \operatorname{Re} G(z) = \min \{G(z) \big|_{z=1}, G(z) \big|_{z=-1}\}.$$

The Circle Criteria for Stability of Fuzzy Controller

LU Zhaohui and HUANG Daojun

(Department of Electronic Engineering, Xidian University · Xi'an, 710071, PRC)

Abstract: The paper presents the circle criteria for stability analysis of continuous fuzzy control systems (CFCS) and sampled-data fuzzy control systems (SDFCS). Furthermore it is discussed how the sampling period affects the system stability in SDFCS. The simulation example is given to show that the criteria is useful and effective.

Key words: fuzzy control; absolute stability; circle criteria; sampled-data system; sampling period

本文作者简介

黄道军 1940 年生, 1965 年毕业于西安军事电信工程学院, 现为西安电子科技大学副教授, 电子工程系副主任. 主要从事自动控制理论与计算机智能控制领域的教学与科研工作.

卢朝晖 1969 年生, 1994 年毕业于西安电子科技大学, 获自动控制硕士学位. 感兴趣的领域有非线性控制, 模糊控制, 神经网络等.