

结构和非结构不确定系统的鲁棒稳定性*

唐建国 柏建国

(四川轻化工学院电子系·自贡, 643033)

摘要: 本文考虑了一类既有结构(参数), 又有非结构(H_∞)摄动的系统鲁棒稳定性问题。

从系统族的值域断面入手, 取得了几何意义清楚、计算简便的结果。

关键词: 不确定系统; 鲁棒稳定性; 区间系统; 多面体

1 引言

研究不确定性系统的鲁棒稳定性是控制系统分析和综合的一个重要内容。在大多数实际的控制系统中, 可能同时存在着多种不确定因素, 一般将这些不确定因素分为两大类, 一类是有模型, 但模型中的参数不确定; 另一类是未建模的不确定性, 这就是所谓的结构和非结构的不确定性。单独针对一种不确定性的研究已经取得了大量的成果, 文献[1]对此作了很好的综述。目前, 研究同时具有两种不确定性的系统鲁棒性受到重视, 这方面已经出现了一些结果, 如[2]的结果就非常令人鼓舞。[2]的结果有些类似 Kharitonov 的 4 多项式定理^[3]。虽然限制条件还比较强, 但毕竟是迈出了开拓性的一步。

本文继续在此领域内探索, 将研究的范围从[2]的区间系统扩展到更具一般性的线性相关系数摄动系统, 这又与目前对 Kharitonov 定理的扩展相类似。同时, 本文另辟路径, 以值域断面的几何特性为基础, 努力寻求几何概念清楚、更便于应用的系统鲁棒性分析方法。

2 问题的提出

考虑图 1 所示的小增益定理模式。

其中 g 是一个稳定的线性时不变系统模型; ΔP 则是一个具有有界 H_∞ 范数的未建模反馈, 它包含了整个系统的不确定因素。关于图 1 系统的鲁棒稳定性, 已经有了如下为人们熟知的定理。

定理 1 若 $g(s)$ 是一个稳定的传递函数, 摄动 ΔP 满足 $\|\Delta P\|_\infty < \alpha$, 则闭环系统仍然保持稳定的充要条件为

$$\|g\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (1)$$

在只考虑 ΔP 一种不确定性的情况下, $g(s)$ 被视为一个确定的传递函数, 因此, 应用定理 1 可以方便地判定图 1 系统的鲁棒稳定性。但是, 现在要考虑同时存在两种不确定性的

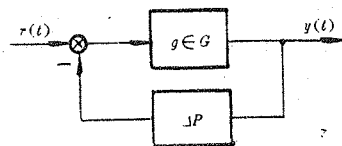


图 1 小增益定理模式

* 四川轻化工学院科研处资助项目。

本文于1992年12月5日收到。

情况,即 $g(s)$ 还具有参数的不确定性, $g(s)$ 属于一个系统族 G . 则定理 1 应修改为

定理 2 若 G 是一个稳定的传递函数族, 摄动 ΔP 满足 $\|\Delta P\|_\infty < \alpha$, 则图 1 的闭环系统仍然保持稳定的充要条件为

$$\max_{g \in G} \|g\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (2)$$

因为 G 中有无穷多个 g , 不能直接应用定理 2 来判定鲁棒稳定性. 本文的主要工作就是寻找与 (2) 式等价的有限检验方法.

3 区间系统

考虑如下实区间多项式族 P

$$P = \{p(s): p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad a_i \in [a_i^-, a_i^+]\}. \quad (3)$$

P 中有 4 个特殊的多项式, 称为 Kharitonov 4 多项式, 定义如下:

$$K_1^1(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^- s^6 + \dots,$$

$$K_2^1(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^+ s^6 + \dots,$$

$$K_3^1(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + a_6^+ s^6 + \dots,$$

$$K_4^1(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + a_6^- s^6 + \dots.$$

任取 $s = j\omega, \omega \in \mathbb{R}$, 区间多项式族 P 的值域断面是复平面的一个正矩形域 (即两边分别与坐标轴平行), 而且 Kharitonov 4 多项式正好取值在矩形的 4 个顶点上. 如图 2 所示.

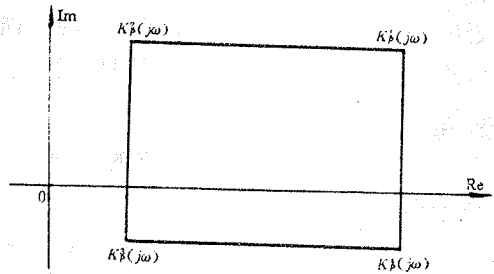


图 2 区间多项式族 P 的值域断面

现在考虑 $g(s) = n(s)/d(s) \in G$, 其中, $n(s) \in N, d(s) \in D$, 且 N 和 D 都是区间多项式族的情况. 根据 H_∞ 范数的定义知.

$$\|g\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |g(j\omega)|. \quad (4)$$

容易推证, 有如下关系:

$$\begin{aligned} \max_{g \in G} \|g\|_\infty &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \{ \max_{g \in G} |g(j\omega)| \} \\ &= \max_{\omega \in \mathbb{R}} \{ \max_{n \in N} |n(j\omega)| / \min_{d \in D} |d(j\omega)| \}. \end{aligned} \quad (5)$$

现在问题转化为如何求取 $\max_{n \in N} |n(j\omega)|$ 和 $\max_{d \in D} |d(j\omega)|$.

引理 1 若 P 是实区间多项式族, 任取一固定的 $\omega \in \mathbb{R}$, 有

$$\max_{p \in P} |p(j\omega)| = \max_{i=1,2,3,4} |K_i^1(j\omega)|. \quad (6)$$

引理 1 是显然的, 不须证明, 图 2 可以给出几何解释, 即

$$\max_{p \in P} |p(j\omega)| = |K_1^1(j\omega)|.$$

下面为了叙述方便, 定义记号:

$$u(\omega) = \operatorname{Re}[d(j\omega)], \quad u(\omega) \in [u^-(\omega), u^+(\omega)],$$

$$v(\omega) = \operatorname{Im}[d(j\omega)], \quad v(\omega) \in [v^-(\omega), v^+(\omega)].$$

再定义端点集 $D_K \subset D$.

$$D_K = \{K_i^1(s): i = 1, 2, 3, 4\}.$$

引理 2 若 D 是实区间多项式族, 任取一固定的 $\omega \in R$, 则有

$$\min_{d \in D} |d(j\omega)| = \begin{cases} 0, & u^+(\omega)u^-(\omega) \leq 0 \cap v^+(\omega)v^-(\omega) \leq 0, \\ \min\{|u^+(\omega)|, |u^-(\omega)|\}, & v^+(\omega)v^-(\omega) \leq 0, \\ \min\{|v^+(\omega)|, |v^-(\omega)|\}, & u^+(\omega)u^-(\omega) \leq 0, \\ \min_{d \in D_k} |d(j\omega)|, & \text{其它.} \end{cases} \quad (7)$$

引理 2 可以简单说明如下: 1) 当值域正矩形包含原点时, 最小模取在原点; 2) 当矩形跨过实轴, 最小模取在矩形边界与实轴的交点上; 3) 当矩形跨过虚轴, 最小模取在矩形边界与虚轴的交点上; 4) 当矩形不跨象限时, 最小模取在矩形的某个顶点上.

由此得到本文的第一个主要结果.

定理 3 若 G 是一个稳定的区间系统族, 摄动 ΔP 满足 $\|\Delta P\|_\infty < \alpha$, 则图 1 的闭环系统仍然保持稳定的充要条件为

$$\max_{\omega \in R} \{ \max_{n \in N_k} |n(j\omega)| / \min_{d \in D} |d(j\omega)| \} \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (8)$$

说明 1 定理 3 是引理 2 和引理 1 的直接推论, 不须证明.

说明 2 引理 1 和引理 2 为定理 3 提供了计算的方法和步骤.

说明 3 定理 3 的计算只涉及对 ω 的扫描, 计算量不大.

定理 3 解决了区间系统的鲁棒稳定性判定问题, 下面考虑更一般的情况.

4 多面体系统

考虑 N 和 D 分别为两个独立的多面体函数族, 这意味着允许 N 和 D 具有线性相关的系数摄动. 根据多面体的性质知

$$N = \text{cov}\{n_1(s), n_2(s), \dots, n_l(s)\},$$

$$D = \text{cov}\{d_1(s), d_2(s), \dots, d_m(s)\}.$$

即 N 和 D 分别可以表示成一组端点函数的凸包. 端点函数的个数与函数的阶数无关, 只与摄动向量的维数有关^[4].

当取定一个 $s \in C$ 值时, 多面体的值域是复平面上的一个凸多边形, 而所有端点函数的取值都是凸多边形的一个顶点, 为了叙述方便, 作如下定义:

$N_v \subset N$, $D_v \subset D$, N_v , D_v 分别为 N , D 的端点函数集.

$\Omega_d(\omega)$ 为 $s = j\omega$ 时 D 的值域.

引理 3 若 N 是多面体, 则有

$$\max_{n \in N} |n(j\omega)| = \max_{n \in N_v} |n(j\omega)|. \quad (9)$$

引理 3 可用复平面上多边形的几何性质证明.

再定义 $d_0(j\omega)$ 为满足下式的点:

$$|d_0(j\omega)| \leq \min_{d \in D_v} |d(j\omega)|.$$

引理 4 若 D 是多面体, $0 \notin \Omega_d(\omega)$, 则 $|d(j\omega)|$ 的最小值点必取在 $d_0(j\omega)$ 或与此点相连的两条边上.

证 对复平面上任一不包含原点的凸多边形, 必能找到一个距离原点最近的顶点, 记这点为 $d_0(j\omega)$, 则可以延长与 $d_0(j\omega)$ 相连的一条边, 将复平面分为两半, 使原点和 $\Omega_c(\omega)$ 各在一半, 如图 3 所示, 所以, $\Omega_c(\omega)$ 与原点距离最近的点必在这条边上. 故引理 4 得证.

设与 $d_0(j\omega)$ 相邻的两上顶点分别记为 $d_1(j\omega)$ 和 $d_2(j\omega)$; $d_0(j\omega) - d_1(j\omega)$ 边上任一点到原点的距离为 $r_{d_1}(\lambda, \omega)$, $d_0(j\omega) - d_2(j\omega)$ 边上任一点到原点的距离为 $r_{d_2}(\lambda, \omega)$, 根据端点的性质, 有

$$r_{d_1}(\lambda, \omega) = |\lambda(d_1(j\omega) - d_0(j\omega)) + d_0(j\omega)|, \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$r_{d_2}(\lambda, \omega) = |\lambda(d_2(j\omega) - d_0(j\omega)) + d_0(j\omega)|, \quad \lambda \in [0, 1].$$

因此可得到本文的另一个更重要的结果如下:

定理 4 若 G 是一个稳定的多面体系统族, 摄动 ΔP 满足 $\|\Delta P\|_\infty < \alpha$, 则图 1 的闭环系统仍然保持稳定的充要条件为

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\max_{s \in N_s} |n(j\omega)|}{\min_{\lambda \in [0, 1]} \{ \min_{i=1, 2} r_{d_i} \}} \right\} \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (10)$$

定理 4 的证明由引理 3 和引理 4 给出.

说明 1 计算 $\min_{\lambda \in [0, 1]} r_{d_i}, i=1, 2$ 时应该让 λ 从 0 到 1 扫描, 只要发现 r_{d_i} 不随 λ 增加而减小, 就可停止扫描. 取上次计算所得的 r_{d_i} 为 $\min_{\lambda \in [0, 1]} r_{d_i}$. 如果计算第一步就发现 r_{d_i} 不减, 则 $\min_{\lambda \in [0, 1]} r_{d_i} = |d_0(j\omega)|$.

说明 2 如果首先对 r_{d_i} 搜索求得了 $\min_{\lambda \in [0, 1]} r_{d_i} \neq |d_0(j\omega)|$, 则不必再对 r_{d_i} 进行搜索, 因为与 $d_0(j\omega)$ 点相连的两条边上只可能有一个点的模小于 $d_0(j\omega)$ 的模. 故这点一定是最小点.

5 举 例

下面用一个简单的例子来说明本文结果的应用. 考虑如下稳定的多面体系统族

$$g(s) = n(s)/d(s) \in G.$$

其中

$$n(s) = n_0 + n_1 s + (3n_0 + n_1)s^2 \in N,$$

$$d(s) = d_0 + d_1 s + (d_0 + d_1)s^2 + s^3 \in D,$$

$$n_0 \in [1, 2], n_1 \in [-1, 1], d_0 \in [1, 3], d_1 \in [2, 4].$$

将摄动参数 n_0, n_1, d_0, d_1 , 分别取区间端点值, 得到 N 和 D 的端点多项式

$$n_1(s) = 1 - s + 2s^2, \quad d_1(s) = 1 + 2s + 3s^2 + s^3,$$

$$n_2(s) = 1 + s + 4s^2, \quad d_2(s) = 1 + 4s + 5s^2 + s^3,$$

$$n_3(s) = 2 - s + 5s^2, \quad d_3(s) = 3 + 2s + 5s^2 + s^3,$$

$$n_4(s) = 2 + s + 7s^2, \quad d_4(s) = 3 + 4s + 7s^2 + s^3.$$

根据这些端点多项式, 用引理 3 和引理 4 可以分别计算得出每个 $s = j\omega$ 处的 $\max_{s \in N} |n(j\omega)|$ 以及 $\min_{d \in D} |d(j\omega)|$, 然后得到 $\max_{g \in G} |g(j\omega)|$, 让 s 沿着虚轴扫描, 这得到一条 $\max_{g \in G} |g(j\omega)|$ 随 ω

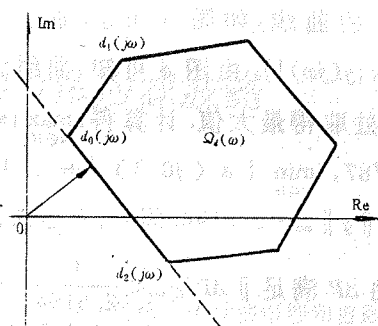


图 3 引理 4 的几何解释

变化的曲线,如图 4 所示. 而 $\|g\|_{\infty} = \max_{\omega \in R} \{\max_{g \in G} |g(j\omega)|\}$. 由图 4 可知,曲线大约在 $\omega = 0.9$ 处取得最大值. 计算得: $\max_{s \in N} |n(j0.9)| = 3.7787$, $\min_{d \in D} |d(j0.9)| = 1.4998$, 因此 $\max_{g \in G} \|g\|_{\infty} = 2.5194$. 因此,只要未建模的反馈扰动 ΔP 满足 $\|\Delta P\|_{\infty} < \frac{1}{2.5194} = 0.39692$, 满足本例的图 1 系统就是鲁棒稳定的.

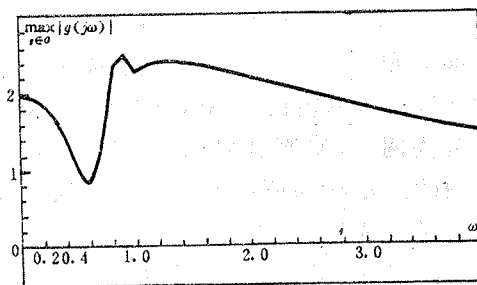


图 4 $\max_{g \in G} |g(j\omega)| - \omega$ 曲线

6 结 论

本文解决了一类既有结构的扰动,又有非结构的扰动的系统鲁棒稳定性问题. 在目前这方面还不多的结果中,文献[2]的结果比较引人注目. 本文与[2]的显著区别在于: 1) 以系统族的值域断面为基础,有清楚的几何意义; 2) 讨论的范围比[2]的限制更小.

参 考 文 献

- [1] 黄琳,王龙,于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战. 控制理论与应用, 1991, 8(1): 11—29
- [2] Chapellat, H., et al. Robust Stability Under Structured and Unstructured Perturbations. IEEE Trans., Automat. Contr., 1990, AC-35(10): 1100—1107
- [3] Kharitonov, V. L. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. Differentsial'nye Uravneniya, 1978, 14: 2086—2088
- [4] 唐建国等. 一类多项式族的 D 鲁棒稳定性分析. 第三届全国控制与决策系统学术会议论文集, 沈阳, 1991, 338—342

Robust Stability of Structured and Unstructured Uncertain Systems

TANG Jianguo and PA Jianguo

(Sichuan Institute of Light Industry and Chemical Technology · Zi'gong, 643033, PRC)

Abstract: This paper deals with the robust stability problems of the systems subject to both structured (parametric) and unstructured (H_{∞}) perturbations, and based on the value region section of the system family, presents some results which have clear geometry concept and much less amount of computation.

Key words: uncertain system; robust stability; interval system; polytope

本文作者简介

唐建国 1954 年生. 副教授. 1982 年毕业于浙江大学. 1992 年于成都科技大学获硕士学位. 研究兴趣和领域为不确定性系统的分析和设计, 过程控制等.

柏建国 1937 年生. 1960 年毕业于重庆大学动力系, 同年留校任教, 1981 年调至四川轻化工院. 从事自动化教学和研究工作三十四年. 主要研究方向为控制理论与智能控制, 现任中国化工学会化工自动化及仪表专业委员会委员. 中国自动化学会智能控制与智能化专委会委员等学术职务. 共发表论文近 80 篇.