第 11 卷第 6 期
1994 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 6
Dec., 1994

新型的噪声统计估值器和自适应滤波器

刘铁男　段玉波

(大庆石油学院计算机与控制工程系·黑龙江安达市, 151400)

摘要: 本文在系统输入和输出噪声相关的条件下,提出一种新的噪声统计估值器和自适应状态滤波器,应用表明了它的有效性.

关键词: 噪声统计估值器; 自适应滤波器

1　引　言

文献[1]和[2]在系统输入和输出噪声(w_k 和 v_k)是独立正态白噪声的条件下,分别提出非时变的和时变的噪声统计的极大后验(MAP)估值器及自适应状态滤波器. 本文在 w_k 和 v_k 是联合正态白噪声(在相同时刻 w_k 和 v_k 是相关的)的情况下,推广了文献[1]和[2]的结果,为自适应滤波提供了新方法.

2　噪声统计的极大后验估值器

考虑如下系统:

$$x_{k+1} = \varphi_k x_k + w_k, \tag{2.1}$$

$$y_k = H_k x_k + v_k. \tag{2.2}$$

其中 x_k 是 n 维状态向量, y_k 是 m 维观测向量, φ_k 和 H_k 是已知矩阵, $\xi_k^\tau=(w_k^\tau, v_k^\tau)$ 是联合正态白噪声, ξ_k 与 x_0 独立, 且有

$$\mathrm{E}[\xi_k] = \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} = \gamma, \quad \mathrm{var}[\xi_k] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\tau & R \end{bmatrix} = \Sigma. \tag{2.3}$$

其中 E, var 和 τ 分别是数学期望、方差和转置符号.

当噪声统计已知时,用文献[3]类似方法可得到系统(2.1)~(2.3)的最优滤波算法如下:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + F_{k+1}\varepsilon_{k+1}, \tag{2.4}$$

$$F_{k+1} = P_{k+1|k}H_{k+1}^\tau(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^\tau + R)^{-1}, \tag{2.5}$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = \varphi_k\hat{x}_{k|k-1} + K_k\varepsilon_k + q, \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_k = y_k - H_k\hat{x}_{k|k-1} - r, \tag{2.7}$$

$$K_k = (\varphi_k P_{k|k-1}H_k^\tau + S)(H_k P_{k|k-1}H_k^\tau + R)^{-1}, \tag{2.8}$$

$$P_{k+1|k} = \varphi_k P_{k|k-1}\varphi_k^\tau - K_k(\varphi_k P_{k|k-1}H_k^\tau + S)^\tau + Q. \tag{2.9}$$

其中 F_{k+1}, K_k 分别是滤波和预报增益, ε_k 是新息, 且有

$$\mathrm{E}[\varepsilon_k] = 0, \quad \mathrm{E}[\varepsilon_k\varepsilon_k^\tau] = H_k P_{k|k-1}H_k^\tau + R. \tag{2.10}$$

由于 ξ_k 服从正态分布,显然在给定 x_j 时, (x_{j+1}, y_j) 服从条件正态分布,且有概率密度:

本文于1993年6月26日收到. 1994年3月29日收到修改稿.

$$p(x_{j+1},y_j|x_j) = c_j|\Sigma|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_{j+1}-\varphi_jx_j-q\\ y_j-H_jx_j-r\end{bmatrix}^{\tau}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}x_{j+1}-\varphi_jx_j-q\\ y_j-H_jx_j-r\end{bmatrix}\right]. \tag{2.11}$$

其中$|\cdot|$表示行列式，c_j是周知的常数因子.

当噪声统计未知时，基于观测 $Y_k=\{y_k,\cdots,y_0\}$，γ,Σ 和状态 $X_{k+1}=\{x_{k+1},\cdots,x_1\}$的 MAP 估计 $\hat{\gamma},\hat{\Sigma}$ 和 $\hat{x}_{j+1|k}(j=0,\cdots,k)$，可用极大化如下条件密度求得：

$$J^* = p(X_{k+1},\gamma,\Sigma|Y_k) = p(X_{k+1},\gamma,\Sigma Y_k)/p(Y_k). \tag{2.12}$$

定理 1 对于(2.1)～(2.3)式描述的系统，假设 γ 和 Σ 相互独立且服从均匀分布，则有噪声统计的 MAP 估值器如下：

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}), \tag{2.13}$$

$$\hat{r}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(y_j-H_j\hat{x}_{j|k}), \tag{2.14}$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}-q)(\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}-q)^{\tau}, \tag{2.15}$$

$$\hat{S}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}-q)(y_j-H_j\hat{x}_{j|k}-r)^{\tau}, \tag{2.16}$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(y_j-H_j\hat{x}_{j|k}-r)(y_j-H_j\hat{x}_{j|k}-r)^{\tau}. \tag{2.17}$$

证 由(2.12)式知 J^* 的极大化等价于 $p(X_{k+1},\gamma,\Sigma,Y_k)$的极大化，由正态性假设，易知

$$J = p(X_{k+1},\gamma,\Sigma,Y_k) = p(x_0)p(\gamma)p(\Sigma)\prod_{j=0}^{k}p(x_{j+1},y_j|x_j,\gamma,\Sigma).$$

把(2.11)式代入上式得：

$$J = c|\Sigma|^{-(k+1)/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\left[\begin{bmatrix}x_{j+1}-\varphi_jx_j\\ y_j-H_jx_j\end{bmatrix}-\gamma\right]^{\tau}\Sigma^{-1}\left[\begin{bmatrix}x_{j+1}-\varphi_jx_j\\ y_j-H_jx_j\end{bmatrix}-\gamma\right]\right],$$

$$c = p(x_0)p(\gamma)p(\Sigma)\prod_{j=0}^{k}c_j.$$

上式两边取对数得

$$\ln(J) = -\frac{k+1}{2}\ln(|\Sigma|)-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\left[\begin{bmatrix}x_{j+1}-\varphi_jx_j\\ y_j-H_jx_j\end{bmatrix}-\gamma\right]^{\tau}\Sigma^{-1}\left[\begin{bmatrix}x_{j+1}-\varphi_jx_j\\ y_j-H_jx_j\end{bmatrix}-\gamma\right]+\text{常数}.$$

因为 J 与 $\ln(J)$有相同的极值点，在上式中应用矩阵导数运算法则[2]，则有 γ 和 Σ 的 MAP 估值：

$$\hat{\gamma}_{k+1} = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}\\ y_j-H_j\hat{x}_{j|k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{q}_{k+1}\\ \hat{r}_{k+1}\end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}-q\\ y_j-H_j\hat{x}_{j|k}-r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_{j+1|k}-\varphi_j\hat{x}_{j|k}-q\\ y_j-H_j\hat{x}_{j|k}-r\end{bmatrix}^{\tau} = \begin{bmatrix}\hat{Q}_{k+1} & \hat{S}_{k+1}\\ \hat{S}^{\tau}_{k+1} & \hat{R}_{k+1}\end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

在(2.18)和(2.19)式中应用矩阵分块运算法则于是定理得证.

3 次优无偏 MAP 噪声统计估值器

在(2.13)～(2.17)式中含有状态的平滑估值，计算量大，为此象[1,2]那样考虑次优

估值器. 我们有如下定理：

定理 2 对于噪声统计 MAP 估值器(2.13)～(2.17)，有如下次优无偏 MAP 估值器：

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|j} - \varphi_j\hat{x}_{j|j-1}), \tag{3.1}$$

$$\hat{r}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(y_j - H_j\hat{x}_{j|j-1}), \tag{3.2}$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(K_j\varepsilon_j\varepsilon_j^{\tau}K_j^{\tau} + P_{j+1|j} - \varphi_jP_{j|j-1}\varphi_j^{\tau}), \tag{3.3}$$

$$\hat{S}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(K_j\varepsilon_j\varepsilon_j^{\tau} - \varphi_jP_{j|j-1}H_j^{\tau}), \tag{3.4}$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\varepsilon_j\varepsilon_j^{\tau} - H_jP_{j|j-1}H_j^{\tau}). \tag{3.5}$$

证 在(2.13)～(2.17)式中分别用 $\hat{x}_{j+1|j}$和 $\hat{x}_{j|j-1}$代替 $\hat{x}_{j+1|k}$和 $\hat{x}_{j|k}$，并且应用(2.6)～(2.9)式得：

$$\hat{q}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|j} - \varphi_j\hat{x}_{j|j-1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(K_j\varepsilon_j + q), \tag{3.6}$$

$$\hat{r}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(y_j - H_j\hat{x}_{j|j-1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\varepsilon_j + r), \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|j} - \varphi_j\hat{x}_{j|j-1} - q)(\hat{x}_{j+1|j} - \varphi_j\hat{x}_{j|j-1} - q)^{\tau} \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}K_j\varepsilon_j\varepsilon_j^{\tau}K_j^{\tau},\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\hat{S}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\hat{x}_{j+1|j} - \varphi_j\hat{x}_{j|j-1} - q)(y_j - H_j\hat{x}_{j|j-1} - r)^{\tau} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}K_j\varepsilon_j\varepsilon_j^{\tau}, \tag{3.9}$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(y_j - H_j\hat{x}_{j|j-1} - r)(y_j - H_j\hat{x}_{j|j-1} - r)^{\tau} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon_j\varepsilon_j^{\tau}. \tag{3.10}$$

在(3.6)和(3.7)式两边取期望，并注意(2.10)式易知(3.6)和(3.7)式具有无偏性. 在(3.8)式两边取期望，并应用(2.10)和(2.9)式得

$$\mathrm{E}[\hat{Q}_{k+1}] = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(\varphi_jP_{j|j-1}\varphi_j^{\tau} - P_{j+1|j}) + Q.$$

上式右边第一项为偏移值，在(3.8)式中减去该偏移值得(3.3)式，且易验知(3.3)的无偏性. 同理可得到(3.4)和(3.5)式，并且可验证它们的无偏性. 证毕.

用周知的方法可把(3.1)～(3.5)的算术均值公式化成递推的形式，于是有定理：

定理 3 取 $d_k=1/(k+1)$，对于无偏估计(3.1)～(3.5)有如下递推次优(MAP)无偏估值器：

$$\hat{q}_{k+1} = \hat{q}_k + d_k(\hat{x}_{k+1|k} - \varphi_k\hat{x}_{k|k-1} - \hat{q}_k), \tag{3.11}$$

$$\hat{r}_{k+1} = \hat{r}_k + d_k(y_k - H_k\hat{x}_{k|k-1} - \hat{r}_k), \tag{3.12}$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \hat{Q}_k + d_k(K_k\varepsilon_k\varepsilon_k^{\tau}K_k^{\tau} + P_{k+1|k} - \varphi_kP_{k|k-1}\varphi_k^{\tau} - \hat{Q}_k), \tag{3.13}$$

$$\hat{S}_{k+1} = \hat{S}_k + d_k(K_k\varepsilon_k\varepsilon_k^{\tau} - \varphi_k P_{k|k-1}H_k^{\tau} - \hat{S}_k), \tag{3.14}$$

$$\hat{R}_{k+1} = \hat{R}_k + d_k(\varepsilon_k\varepsilon_k^{\tau} - H_k P_{k|k-1}H_k^{\tau} - \hat{R}_k). \tag{3.15}$$

当系统带未知常的噪声统计时可用定理3求取，若带未知时变噪声统计时，应用指数加权法[2]，我们有：

推论 1 当系统(2.1)～(2.3)带未知时变噪声统计时，只须在(3.11)～(3.15)式中取 $d_k=(1-\alpha)/(1-\alpha^{k+1})$，则得到其递推次优无偏估值器. α 是遗忘因子，$0<\alpha<1$.

证 方法同文献[2].

把由(3.11)～(3.15)式得到的估值代入(2.4)～(2.9)式得到自适应滤波器：

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + F_{k+1}\varepsilon_{k+1}, \tag{3.16}$$

$$F_{k+1} = P_{k+1|k}H_{k+1}^{\tau}(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^{\tau} + \hat{R}_{k+1})^{-1}, \tag{3.17}$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = \varphi_k\hat{x}_{k|k-1} + K_k\varepsilon_k + \hat{q}_k, \tag{3.18}$$

$$\varepsilon_k = y_k - H_k\hat{x}_{k|k-1} - \hat{r}_k, \tag{3.19}$$

$$K_k = (\varphi_k P_{k|k-1}H_k^{\tau} + \hat{S}_k)(H_k P_{k|k-1}H_k^{\tau} + \hat{R}_k)^{-1}, \tag{3.20}$$

$$P_{k+1|k} = \varphi_k P_{k|k-1}\varphi_k^{\tau} - K_k(\varphi_k P_{k|k-1}H_k^{\tau} + \hat{S}_k)^{\tau} + \hat{Q}_k. \tag{3.21}$$

计算步骤：当求得 $\hat{x}_{k|k-1}$，$P_{k|k-1}$和 k 时刻噪声统计值后，用(3.19)，(3.20)，(3.18)，(3.21)计算；然后用(3.11)～(3.15)求噪声统计 $k+1$ 时刻的值；之后把(3.19)式中 k 换为 $k+1$ 求 ε_{k+1}；继而用(3.17)求 F_{k+1}，用(3.16)求 $\hat{x}_{k+1|k+1}$. 对每个 k 重复上述过程，直到达到最终步数止.

4 仿真实例

我们作了大量仿真实验均得到好的结果，仅举其中一例. 例如在(2.1)～(2.2)中有

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} 0.61 & 0 & 0.39 \\ 0.29 & 0.72 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0.89 \end{bmatrix} \quad H_k = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1.03 \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

$$w_k = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} e_k + \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.10 \\ 0.08 \end{bmatrix}, \quad v_k = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} e_k + \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.18 \\ 0.17 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

这里 $\{e_k\}$是一维正态 $\mathscr{N}(0,1)$白噪声序列，用文[4]方法生成. 由(4.2)式知噪声统计的真值为

$$q = (0.11\ 0.10\ 0.08)^{\mathrm{T}}, \quad r = (0.14\ 0.18\ 0.17)^{\mathrm{T}}, \tag{4.3}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.72 & 0.54 \\ 0.72 & 0.64 & 0.48 \\ 0.54 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.21 & 1.43 & 1.32 \\ 1.43 & 1.69 & 1.56 \\ 1.32 & 1.56 & 1.44 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.99 & 1.17 & 1.08 \\ 0.88 & 1.04 & 0.96 \\ 0.66 & 0.78 & 0.72 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

这是带未知常的噪声统计的系统，于是在(3.11)～(3.15)式中取 $d_k=1/(k+1)$. 取初值(I 是 3×3 单位阵)为

$$\hat{x}_{0|-1} = (90\ 89\ 91)^{\tau}, \quad \hat{q}_0 = \hat{r}_0 = (0\ 0\ 0)^{\tau}, \quad P_{0|-1} = 50I, \quad \hat{Q}_0 = \hat{R}_0 = \hat{S}_0 = 10I.$$

经过 347 步递推估计得到如下结果：

$$\hat{x}_{k+1|k} = (101.82\ 102.11\ 102.41)^{\tau},\quad \hat{x}_{k+1|k+1} = (101.45\ 101.47\ 101.61)^{\tau},$$
$$\hat{q}_{k+1} = (0.125\ 0.099\ 0.075)^{\tau},\quad \hat{r}_{k+1} = (0.147\ 0.190\ 0.160)^{\tau},\tag{4.5}$$

$$\hat{Q}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.792 & 0.695 & 0.530 \\ 0.695 & 0.628 & 0.482 \\ 0.530 & 0.482 & 0.370 \end{bmatrix},\quad \hat{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.155 & 1.383 & 1.291 \\ 1.383 & 1.682 & 1.499 \\ 1.291 & 1.499 & 1.427 \end{bmatrix},$$
$$\hat{S}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.978 & 1.158 & 1.029 \\ 0.836 & 0.997 & 0.953 \\ 0.653 & 0.756 & 0.699 \end{bmatrix}.\tag{4.6}$$

由模型得到的状态真值为

$$x_{k+1} = (101.5\ 101.44\ 101.67)^{\tau}.\tag{4.7}$$

比较(4.3)，(4.4)与(4.5)，(4.6)和(4.5)与(4.7)式可见上述噪声统计估值器和自适应滤波器具有收敛到各自真值的优良性质.本文的方案为自适应滤波提供了新方法.

参 考 文 献

[1] Sage, A. P. and Husa, G. W.. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics. Joint Automatic Control Conference, 1969, 760—769

[2] 邓自立，郭一新.现代时间序列分析及其应用.北京：知识出版社，1989，132—135

[3] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Optimal Filtering, Prentice-Hall, INC., 1979, 115—121

[4] 陈广义，刘铁男.一种正态白噪声序列数字发生器，大庆石油学院，1993，增刊 1：153—156

New Estimators of Noise Statistics and Adaptive Filters

LIU Tienan　and　DUAN Yubo

(Department of Computer & Control Engineering, Daqing Petroleum Institute • Anda, Heilongjiang, 151400, PRC)

Abstract: In this paper a kind of new estimators of noise statistics and adaptive filters of states are put forward in the case that input and output noises of systems are correlative. It is proved that they are very effective after being used.

Key words: estimators of noise statistics; adaptive filters

本文作者简介

刘铁男　1945 年生. 1970 年 7 月于北京邮电学院无线通讯专业毕业，1982 年 7 月于黑龙江大学应用数学研究所自动控制理论专业研究生毕业并获硕士学位.现任大庆石油学院计算机与控制工程系副教授.研究方向为系统辨识，自适应控制和自适应滤波，出版专著一本，发表论文多篇，一个科研项目获部级科技进步奖.

段玉波　1951 年生. 1975 年于大庆石油学院电气自动化专业毕业.现任大庆石油学院计算机与控制工程系副教授，研究方向为电气自动化，所从事的科研项目，有七项获省部级科技进步奖.