

鲁棒稳定界的连续性分析及优化方法*

胡庭姝 施颂椒

(上海交通大学自动控制系统, 200030)

摘要: 针对一类常见的不确定系统, 本文得出了鲁棒稳定界 $\rho(F)$ 连续、可微的条件. 给出了 $\rho(F)$ 对状态反馈 F 的微分表达式, 以及在极点配置的约束下使 $\rho(F)$ 增大的梯度方法. 实例显示, 梯度方法非常有效.

关键词: 鲁棒稳定界; 连续性; 可微性; 梯度方法

1 引言

1990年, Barmish 等人在[1]中举例说明, (实) 鲁棒稳定界不一定是连续的, 即, 某些系统数据的微小变化可能导致鲁棒稳定界的突变. Hinrichsen 等人在[2]中也指出实数鲁棒稳定界可能出现不连续性, 这种不连续性可能导致对系统鲁棒稳定性的错误判断. 因此, 对鲁棒稳定界的连续性分析是很必要的. 近年来, 这一问题的研究正逐步受到人们的重视, 然而由于其理论上的高难度, 进展还比较缓慢. [3], [4]等就这一问题得出了一些粗略的结果. 这些结论还很难用于对实际系统进行鲁棒性分析和设计.

本文将对一类比较简单, 但又很常见的参数不确定系统作细致的分析. 对这类系统的鲁棒性研究是状态空间中一般系统鲁棒研究的基础和关键.

2 系统描述及鲁棒稳定界的定义

考虑如下单参数不确定系统

$$\dot{x} = A(k)x + B(k)u. \quad (2.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. k 为不确定参数. 假设 $A(k)$ 和 $B(k)$ 关于 k 连续可微. 记 $A(0) = A_0$, $B(0) = B_0$, 以及 $\frac{\partial A(k)}{\partial k} = A_k$, $\frac{\partial B(k)}{\partial k} = B_k$, 对(2.1)加入状态反馈 $u = Fx$, 得闭环系统为

$$\dot{x} = [A(k) + B(k)F]x. \quad (2.2)$$

定义 2.1 设 $A_0 + B_0F$ 的所有特征值都具有负实部, 则定义系统(2.2)的鲁棒稳定界 $\rho(F)$ 为

$$\begin{aligned} \rho(F) &:= \min\{|k|, A(k) + B(k)F \text{ 有非负实部的特征值}\} \\ &= \min\{|k|, \text{对某一 } i, \operatorname{Re} \lambda_i[A(k) + B(k)F] = 0\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 λ_i 表示第 i 个特征值, $\operatorname{Re} \lambda_i$ 表示 λ_i 的实部.

显然, 当 $|k| < \rho(F)$ 时, 系统(2.2)稳定, 当 $|k| = \rho(F)$ 时, 系统(2.2)不稳定. 所以, $\rho(F)$ 是(2.2)关于 k 的最大稳定范围, 称为鲁棒稳定界(Robust Stability Radius, 或 Stability Margin).

* 国家自然科学基金资助. 上海交通大学科研基金资助.

本文于1993年10月9日收到. 1994年6月30日收到修改稿.

3 $\rho(F)$ 的连续性和可微性

为叙述方便,记 $\Omega(F, k) = A(k) + B(k)F$. 对于一给定的 F , 可绘出当 k 变化时, $\Omega(F, k)$ 的 n 条特征值轨迹, 或称根轨迹. 每条轨迹都是连续的, 而且除交叉点外都是光滑的, $\rho(F)$ 就等于根轨迹经过虚轴时的最小 $|k|$. 如果没有根轨迹与虚轴相交, 那么 $\rho(F) = \infty$. 先定义正向稳定界和负向稳定界.

定义 3.1 已知 $A(k)$ 和 $B(k)$. 给定 F , 设 $A_0 + B_0 F$ 稳定, 则定义:

$$\rho^+(F) := \min\{k > 0, \text{对某一 } i, \operatorname{Re}\lambda_i[\Omega(F, k)] = 0\},$$

$$\rho^-(F) := -\max\{k < 0, \text{对某一 } i, \operatorname{Re}\lambda_i[\Omega(F, k)] = 0\}.$$

显然, $\rho(F) = \min\{\rho^+(F), \rho^-(F)\}$. 如果 $\rho^+(F) = \rho^-(F)$. 一般说来, $\rho(F)$ 不可微. 出现这种情况的概率为零. 本文假设 $\rho^+(F) \neq \rho^-(F)$, 或更进一步, $\rho^+(F) < \rho^-(F)$, 这时 $\rho(F) = \rho^+(F)$. 对于 $\rho^+(F) > \rho^-(F)$, 处理方法相似. 以下给出 $\rho(F)$ 连续和可微的定理.

定理 3.1 对于给定的 F_0 , 如果以下条件满足:

1) $\rho^+(F_0) < \rho^-(F_0)$;

2) 当 $k_0 = \rho^+(F_0)$ 时, $\Omega(F_0, k_0)$ 在正虚轴上(包括原点)只有一个特征值. 设此特征值的序号为 1;

3) $[\partial \operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, k)]/\partial k]|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}} \neq 0$, 则 $\rho(F)$ 在 F_0 处连续且可微, 并且微分表达式为

$$\left. \frac{d\rho(F)}{dF} \right|_{F=F_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, k)]}{\partial F} / \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, k)]}{\partial k} \right) \Big|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}}. \quad (3.1)$$

证 i) 如果条件 2) 和条件 3) 满足, 则 $\rho^+(F)$ 连续且可微. 当 $k_0 = \rho^+(F_0)$ 时, $\Omega(F_0, k_0)$ 在正虚轴上只有一个特征值 λ_1 , 令 $\lambda_1 = j\omega_0$. 由条件 3), 可以肯定, $[\partial \operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, k)]/\partial k]|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}} > 0$, 因为从 $\rho^+(F)$ 的定义可知, 对于 $0 < \varepsilon < k_0$, $\operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F_0, k_0 - \varepsilon)] < 0$,

同时, 对于足够小的 $\delta > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F_0, k_0 + \delta)] > 0$.

由特征轨迹的连续变化性和条件 2), 可以断定, 当 F 在 F_0 的某个邻域内变化时, 以最小 k 与虚轴相交的根轨迹仍然是第 1 条, 且交点仍在 $j\omega_0$ 附近, 满足 $\operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, k)] = 0$ 的最小 k 仍在 k_0 附近. 因此, 当 F 在 F_0 的某一邻域内变化时, $\rho^+(F) = k$, k 满足 $\operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, k)] = 0$, 且 k 在 k_0 附近, 或可等效叙述为

$$\operatorname{Re}\lambda_1[\Omega(F, \rho^+(F))] = 0, \quad \rho^+(F) \text{ 在 } k_0 \text{ 附近}. \quad (3.2)$$

这样, 当 F 在 F_0 附近变化时, $\rho^+(F)$ 通过 (3.2) 的隐函数关系由 F 唯一确定. 注明 $\rho^+(F)$ 在 k_0 附近是因为第一条根轨迹可能多次与虚轴相交. 由 (3.2), 可证明 $\rho^+(F)$ 在 F_0 处连续且可微.

简记 $\lambda_i[\Omega(F, k)]$ 为 λ_i , 由于 λ_1 是单根, 所以 $\frac{\partial \lambda_1}{\partial F}$ 和 $\frac{\partial \lambda_1}{\partial k}$ 存在, 而 $\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_1}{\partial F} = \operatorname{Re} \frac{\partial \lambda_1}{\partial F}$, $\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_1}{\partial k} = \operatorname{Re} \frac{\partial \lambda_1}{\partial k}$, 所以

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_1}{\partial F_{ij}} \right|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}} \Delta F_{ij} + \left. \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_1}{\partial k} \right|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}} \Delta \rho^+(F) = 0.$$

由于 $\left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}} \neq 0$, 所以当 $\Delta F_{ij} \rightarrow 0$ 时, 必有 $\Delta \rho^+(F) \rightarrow 0$, 即 $\rho^+(F)$ 在 F_0 是连续的.

进一步, 由隐函数的性质, $\frac{d\rho^+(F)}{dF}$ 存在, 且 $\left. \frac{d\rho^+(F)}{dF} \right|_{F=F_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial F_{ij}} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \Big|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}}$, 即有

$$\left. \frac{d\rho^+(F)}{dF} \right|_{F=F_0} = - \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial F} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} \right) \Big|_{\substack{k=k_0 \\ F=F_0}} \quad (3.3)$$

ii) 以下证明, 存在 F_0 的某个邻域 $N(F_0)$, 使得对所有 $F \in N(F_0)$, $\rho(F) = \rho^+(F)$. 由 i), $\rho^+(F)$ 是连续的. 令 $\delta = [\rho^-(F_0) - \rho^+(F_0)]/3$, 则存在 $N_1(F_0)$ 和 $N_2(F_0)$ 使得

出, 对 $F \in N_1(F_0)$, $\rho^+(F) < \rho^+(F_0) + \delta$, $\forall F \in N_1(F_0)$. 由 (3.4) 以及对所有 $-k \in (0, \rho^-(F_0) - \delta)$ 和 $F \in N_2(F_0)$, $\Omega(F, k)$ 稳定, 即

由 (3.5) $\rho^-(F) > \rho^-(F_0) - \delta$, $\forall F \in N_2(F_0)$. 令 $N(F_0) = N_1(F_0) \cap N_2(F_0)$, 结合 (3.4) 和 (3.5), 可知, 对所有 $F \in N(F_0)$, $\rho^-(F) > \rho^+(F)$, 即有 $\rho(F) = \rho^+(F)$.

综合 i) 和 ii), 定理 3.1 得证. 证毕.

以上定理给出了 $\rho(F)$ 可微的充分条件, 满足此条件具有通有性. 图 1 给出几种 $\rho(F)$ 为不连续或不可微的情形.

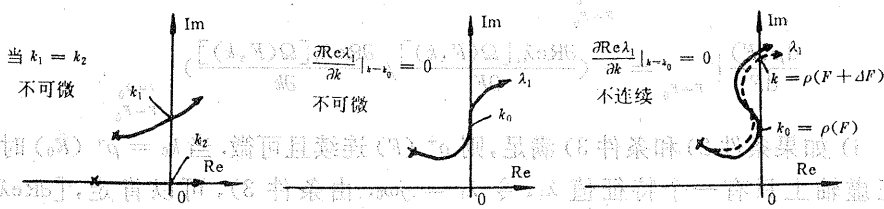


图 1 $\rho(F)$ 不连续或不可微的情形

下面给出求 $\frac{d\rho(F)}{dF}$ 的方法.

对于给定的 F , 可利用逐点法和两分法求 $\rho(F)$. 设 $\Omega(F, k = \rho(F))$ 对应于第一个特征值的左、右特征向量分别是 t^T 和 v , 规范化使 $t^T v = 1$, 则

$$\Omega(F, k)v = \lambda_1 v, \quad \frac{\partial \Omega(F, k)}{\partial k} v + \Omega(F, k) \frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial k} v + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial k},$$

用 t^T 左乘上式两边, 注意到 $t^T \Omega(F, k) = \lambda_1 t^T$ 及 $t^T v = 1$, 得

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial k} = t^T \frac{\partial \Omega(F, k)}{\partial k} \cdot v,$$

类似地

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial F_{ij}} = t^T \frac{\partial \Omega(F, k)}{\partial F_{ij}} v.$$

由 $\Omega(F, k) = A(k) + B(k)F$, 得 $\frac{\partial \Omega(F, k)}{\partial k} = \frac{\partial A(k)}{\partial k} + \frac{\partial B(k)}{\partial k} F$, $\frac{\partial \Omega(F, k)}{\partial F_{ij}} = B(k) \frac{\partial F}{\partial F_{ij}}$, 所以

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial k} = \operatorname{Re}[t^T (A_k + B_k F) v],$$

1 期

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial F_{ij}} &= \operatorname{Re}[t^T B(k) \frac{\partial F}{\partial F_{ij}} v] = \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(v t^T B(k) \frac{\partial F}{\partial F_{ij}})] \\ &= \operatorname{tr}[\operatorname{Re}(v t^T B(k) \frac{\partial F}{\partial F_{ij}})].\end{aligned}$$

因而, $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_1}{\partial F} = [\operatorname{Re}(v t^T B(k))]^T$, 由定理(3.1)可得

$$\frac{d\rho(F)}{dF} = - [\operatorname{Re}(v t^T B(k))]^T / \operatorname{Re}[t^T (A_k + B_k F) v] |_{k=\rho(F)}. \quad (3.6)$$

现在考虑使鲁棒稳定界极大化的问题

$$\sup \rho(F) \quad \text{s. t.} \quad A_0 + B_0 F \text{ 稳定}. \quad (3.7)$$

由于满足 $A_0 + B_0 F$ 稳定的 F 集是一个开集, 所以可利用梯度法使 $\rho(F)$ 增大, 由于 $\rho(F)$ 的函数关系很不规范, 可能不连续或不可微, 所以梯度法不一定能找到驻点.

4 极点配置下使 $\rho(F)$ 增大

这是一个更具实际意义的问题, 给定一组所期望的特征值, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 设这一组特征值各不相同, 那么考虑如下优化问题:

$$\sup \{J = \rho(F)\}, \quad (4.1)$$

$$\text{s. t.} \quad V^{-1}(A_0 + B_0 F)V = A_1. \quad (4.2)$$

其中 $A_1 = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, 如果 λ_i 中有共轭复根, 例如, $\lambda_i, \lambda_{i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$, 则令 $A_1 = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \dots, \lambda_n]$. 这样, (4.2) 式就等效于极点配置的约束条件.

正如[5]等所采用的方法, (4.2) 式的约束可通过引入一矩阵函数 $f: U \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 得以放松.

定义 4.1 设 (A_0, B_0) 可控, A_1 为给定对角阵, 设 A_0 与 A_1 没有相同的特征值, 则 f 可定义如下:

对于自变量 $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 求解

$$A_0 V - V A_1 = -B_0 U. \quad (4.3)$$

如果 V 为非奇异, 则令 $F = UV^{-1}$. f 的定义域, 记为 D_f , 被定义为使 (4.3) 的解 V 非奇异的 U 的集合. 定义 U 在 f 下的象为 F , 即 $F = f(U)$. f 的值域, 记为 R_f , 为 D_f 在 f 下的象.

[6] 已证明, D_f 是 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 中一个稠的开集, R_f 正好就是满足 (4.2) 式的所有 F 的集合, 即

$$\{F | F = f(U), U \in D_f\} = \{F | V^{-1}(A_0 + B_0 F)V = A_1\}. \quad (4.4)$$

由此, (4.2) 得以放松, $J = \rho(F)$ 成为 U 的函数, 而 U 是自变量. 记 $J(U) = \rho(F) = \rho[f(U)]$. 由于 D_f 是开集, 所以 $\frac{\partial F}{\partial U_{ij}}$ 存在. 进一步, 如果 F 满足定理 3.1 的条件, 则 $\frac{dJ}{dU}$ 存在.

定理 4.1 设 $F = f(U)$ 满足定理 3.1 的条件, 则,

$$dJ/dU = (Q_1 + XB)^T.$$

其中 X 满足: $XA_0 - A_1 X = Q_2$, $Q_1 = V^{-1} \left(\frac{dJ}{dF} \right)^T$, $Q_2 = Q_1 F$, $\frac{dJ}{dF} = \frac{d\rho(F)}{dF}$ 由 (3.6) 式给出, V 即 (4.3) 的解.

证 见附录.

既然 $\frac{dJ}{dU}$ 已经获得, 可用梯度方法使 $J(U)$ 增大. 梯度算法可能收敛于驻点, 也可能中止于不可微点, 最后结果很大程度上依赖于所选初值, 只要多次选择初值, 就可得到较满

意的结果.

5 算 例

例 1 考虑开环系统: $\dot{x} = (A_0 + kA_a)x + (B_0 + kB_a)u$, 其中,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & -0.5 \\ 0.3 & -0.6 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3 & -0.5 \\ -1.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

给定闭环极点, $-2 \pm j2$, -4 , 要求在极点配置的条件下, 通过选择 F , 使闭环系统 $\dot{x} = [A_0 + B_0F + k(A_a + B_aF)]x$ 的正向稳定界 $\rho^+(F)$ 增大.

取初值 $U_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 用最速上升梯度方法得

迭代次数	$J = \rho^+(F)$	$\frac{\partial \text{Re}\lambda_1}{\partial k} \big _{k=\rho^+(F)}$	F 取值
0	0.15078	4.68	F_0
1	0.33375	0.35	F_1
2	0.35375	0.0899	F_2
3	0.35500	0.074	F_3
4	2.20250	0.665	F_4
5	2.28844	0.596	F_5

其中 F_0, F_3 和 F_5 取值为

$$F_0 = \begin{bmatrix} -16.778 & 30.778 & 35.000 \\ 17.000 & -39.000 & -46.000 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -8.948 & 17.310 & 19.321 \\ 7.901 & -23.321 & -27.805 \end{bmatrix},$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} -0.626 & 3.907 & 4.003 \\ -1.661 & -8.003 & -10.655 \end{bmatrix}.$$

F_0, F_3 和 F_5 所对应闭环系统的 $k \sim \text{Re}\lambda_i[\Omega(F, k)]$ 关系曲线如图 2.

说明 图 2 中标号 0, 3, 5 的曲线分别是 $\text{Re}\lambda_1[\Omega(F_0, k)]$, $\text{Re}\lambda_1[\Omega(F_3, k)]$ 和 $\text{Re}\lambda_1[\Omega(F_5, k)]$.

从以上数据和曲线可以看出, 梯度方法的效果很明显. 实际上, 第三次迭代到第四次迭代之间跳过了一个不连续点, 这个不连续点就在 F_3 附近. 在图 2 中, 对于 F_3 所对应的标号为 3 的曲

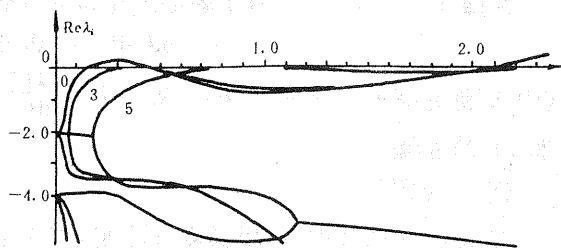


图 2 $k \sim \text{Re}\lambda_i[\Omega(F, k)]$ 关系曲线

1 期

线, $\text{Re}\lambda_1[\Omega(F_3, k)]$ 在 $k = 0.355$ 附近取值为:

k	0.35	0.355	0.36	0.37
$\text{Re}\lambda_1$	-0.00068	-0.00014	0.00006	-0.00047

由此可见, 如果将 U_3 沿着正向梯度方向改变一个微小的值, $\text{Re}\lambda_1$ 在 0.355 附近的极大值就会小于零, 使得 λ_1 在 $k = 0.355$ 附近不与虚轴相交, 而将 $\rho^+(F)$ 突增至 2 左右.

另外, 与 F_5 所对应的标号为 5 的曲线, 在 $k = 0.9$ 处也几乎与横轴相交, 等效于 λ_1 几乎与虚轴相交, 实际上, $\text{Re}\lambda_1$ 在 0.9 处有一个极大值是, $\text{Re}\lambda_1 = -0.00081$, 若将 F 稍微改变, $\rho^+(F)$ 就可能从 2.28844 突降至 0.9 左右.

例 2 考虑开环系统 $\dot{x} = (A_0 + kA_a)x + (B_0 + kB_a)u$. 其中,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.1094 & 0.0628 & 0 & 0 & 0 \\ 1.306 & -2.132 & 0.9807 & 0 & 0 \\ 0 & 1.595 & -3.149 & 1.547 & 0 \\ 0 & 0.0355 & 2.632 & -4.257 & 1.855 \\ 0 & 0.00227 & 0 & 0.1636 & -0.1625 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0638 & 0 \\ 0.0838 & -0.1396 \\ 0.1004 & -0.206 \\ 0.0063 & -0.0128 \end{bmatrix},$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

给定闭环极点为: $-0.2, -0.5, -1, -1 \pm j1$, 设计目的同上例.

取初值 $U_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0.4 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 得 $J_0 = \rho^+(F_0) = 0.01414$. 及 $F_0 = \begin{bmatrix} -73.09 & 44.04 & -88.95 & 70.01 & -18.29 \\ -36.58 & -22.63 & 60.56 & -61.09 & 22.62 \end{bmatrix}$.

在 U_0 处, 沿正梯度方向取不同的步长可得:

步长 h	170	171	172	172.7	172.95 ~ 215
$J = \rho^+(F)$	0.5277	0.85078	1.87813	7.7	∞

若取 $h = 180$, 得 $J_1 = \infty$ 以及

$$F_1 = \begin{bmatrix} -298.77 & -115.34 & 267.32 & -269.84 & 77.93 \\ -203.36 & -129.23 & 305.22 & -298.18 & 89.59 \end{bmatrix}.$$

图 3 中(a)和(b)分别是 F_0 和 F_1 所对应闭环系统的根轨迹.

为显示实轴上的根轨迹, 图中没有画出实轴, 可以看出图 3(b) 的 5 条根轨迹全都走向复平面的左半部, 这与 $p(s) + kq(s)$ 形式的多项式的根轨迹有明显的不同.

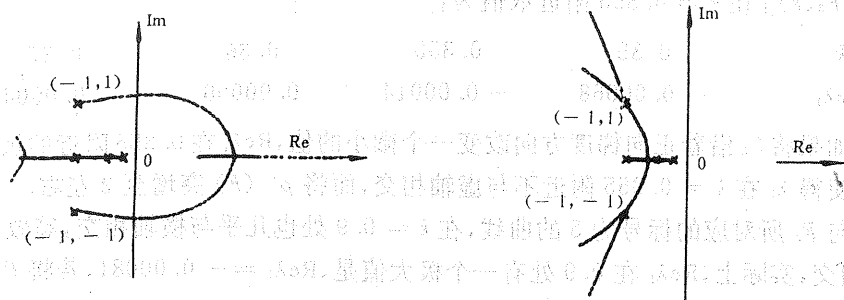


图3 优化前后的根轨迹比较

从以上两个例子可以看出, $\rho^+(F)$ 关于 F 的函数关系很不规则, 可能出现不连续, 也可能没有上界, 但可微性是通有的, 所以可用梯度法使 $\rho^+(F)$ 增大.

参 考 文 献

- [1] Barmish, B. R., et al. Robustness Margin Need not be a Continuous Function of the Problem Data. Systems and Control Letters, 1990, 15: 91 — 98
- [2] Hinrichsen, D., et al. A Note on Some Differences Between the Real and the Complex Stability Radii. Systems and Control Letters, 1990, 14: 401 — 408
- [3] Li, L., et al. On Continuity/Discontinuity in Robustness Indicators. Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control, Brighton, 1991, 547 — 548
- [4] Rantzer, A.. Continuity Properties of Parametric Stability Margin. Proc. of American Conf. on Control, 1992, 2207 — 2209
- [5] 胡庭妹, 施颂椒, 张钟俊. 鲁棒设计的新方法. $\bar{\sigma}[P]$ 和 $\bar{\sigma}[v]$, $\bar{\sigma}[v^{-1}]$ 的极小化. 自动化学报, 1994, 20: 129 — 138
- [6] Hu, T. S. and Shi, S. J.. The Set of Feedback Matrices that Assign the Poles of a System. Proc. of International Symposium MTNS — 89, 2: 129 — 136
- [7] 须田信英. 曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 北京: 科学出版社, 1979

附 录

定理 4.1 的证明

以下证明中, $\text{tr}[\cdot]$, $\text{rs}[\cdot]$ 和 $\text{cs}[\cdot]$ 分别表示矩阵的迹, 行展开和列展开, “ $\otimes$ ” 表示两个矩阵的 Kronecker 积, 定义及相关性质参见 [5] 和 [7].

$$\begin{aligned}
 \text{证 } \frac{\partial J}{\partial U_p} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \cdot \frac{\partial F_{ij}}{\partial U_p} \\
 &= \text{tr} \left[\left(\frac{dJ}{dF} \right)^T \frac{\partial(UV^{-1})}{\partial U_p} \right] \quad (F = UV^{-1}) \\
 &= \text{tr} \left[\left(\frac{dJ}{dF} \right)^T \left(\frac{\partial U}{\partial U_p} V^{-1} - UV^{-1} \frac{\partial V}{\partial U_p} V^{-1} \right) \right] \\
 &= \text{tr} \left[V^{-1} \left(\frac{dJ}{dF} \right)^T \frac{\partial U}{\partial U_p} - V^{-1} \left(\frac{dJ}{dF} \right)^T F \frac{\partial V}{\partial U_p} \right] \quad (\text{tr}[MN] = \text{tr}[NM])
 \end{aligned}$$

令

$$Q_1 = V^{-1} \left(\frac{dJ}{dF} \right)^T, \quad Q_2 = V^{-1} \left(\frac{dJ}{dF} \right)^T F,$$

则

$$\frac{\partial J}{\partial U_p} = \text{rs} Q_1 \cdot \text{cs} \frac{\partial U}{\partial U_p} - \text{rs} Q_2 \cdot \text{cs} \frac{\partial V}{\partial U_p}.$$

由定义 4.1, V 是 $A_0V - VA_1 = -BU$ 的解, 或等效地

$$(I_n \otimes A_0 - A_1^T \otimes I_n) \cdot \text{cs}V = - (I_m \otimes B) \cdot \text{cs}U.$$

因而

$$\frac{\partial J}{\partial U_p} = [\text{rs}Q_1 + \text{rs}Q_2(I_n \otimes A_0 - A_1^T \otimes I_n)^{-1} \cdot (I_m \otimes B)] \cdot \text{cs} \frac{\partial U}{\partial U_p}.$$

令 X 是 $XA_0 - A_1X = Q_2$ 的解, 则

$$\text{rs}Q_2 \cdot (I_n \otimes A_0 - A_1^T \otimes I_n)^{-1} = \text{rs}X,$$

$$\text{rs}Q_2(I_n \otimes A_0 - A_1^T \otimes I_n)^{-1}(I_m \otimes B) = \text{rs}[XB].$$

由此可得

$$\frac{\partial J}{\partial U_p} = \text{rs}[Q_1 + XB] \cdot \text{cs} \frac{\partial U}{\partial U_p} = \text{tr}[(Q_1 + XB) \cdot \frac{\partial U}{\partial U_p}].$$

由于 $\frac{\partial U}{\partial U_p}$ 是一个除第 p 行, 第 q 列上元素为 1, 其余元素都是 0 的矩阵, 若令 $Q = Q_1 + XB$, 则有

$$\frac{\partial J}{\partial U_p} = Q_{pq}.$$

因此 $\frac{dJ}{dU} = Q^T = (Q_1 + XB)^T$ 而 X 满足

$$XA_0 - A_1X = Q_2.$$

证毕.

Continuity Analysis of the Robust Stability Radius and an Optimization Method

HU Tingshu and SHI Songjiao

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: For a class of uncertain systems, conditions for the continuity and the differentiability of the robust stability radius are derived. Denote the stability radius as $\rho(F)$, then $d\rho(F)/dF$ is obtained and a gradient method to increase $\rho(F)$ is derived. A method to increase $\rho(F)$ under the constraint of pole assignment is also presented. Examples show that the gradient method is very effective. Through these examples, the discontinuity property of $\rho(F)$ is demonstrated clearly.

Key words: robust stability radius; continuity; differentiability; the gradient method

本文作者简介

胡庭姝 1966年生, 副教授. 分别于1985年, 1988年和1990年在上海交通大学自动控制系统获学士学位, 硕士学位和博士学位, 主要研究方向是鲁棒控制和 H_∞ -优化方法.

施颂椒 1933年生, 教授. 1956年毕业于上海交通大学电机系. 研究方向为控制理论, 包括鲁棒控制, 自适应控制, H_∞ -优化方法和 μ 方法等.