

关于时变区间矩阵的稳定性研究*

孙继涛 张银萍

(华东冶金学院·安徽马鞍山, 243002)

摘要: 本文对无界时变区间矩阵 $N[P(t), Q(t)]$ 的稳定性进行了研究, 给出了无界时变区间矩阵和具有分解的时变区间矩阵 $N[P(t), Q(t)]$ 稳定的充分条件, 推广和改进了文[1, 2]的工作.

关键词: 时变区间矩阵; 稳定性; 充分条件

不确定系统的鲁棒性是控制理论中一个十分棘手而无法回避的问题, 具有十分重要的地位. 近年来, 引起了国内外学者的极大兴趣^[1~4], 但是相当一部分的控制系统, 需要用时变区间矩阵的稳定性来研究, 文[1]讨论了时变区间矩阵稳定的充分条件. 本文研究更广一类的无界时变区间矩阵 $N[P(t), Q(t)]$ 的稳定性, 给出了无界时变区间矩阵和具有分解的无界时变区间矩阵稳定的充分条件, 作为本文特例可得文[1, 2]的一些结果, 推广和改进了文[1, 2]的工作.

设 $N[P(t), Q(t)] = \{A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n} \mid P(t) \leq A(t) \leq Q(t), i, j = 1, 2, \dots, n\}$, 对 n 阶实变方阵 $A(t)$, 记

$$\|A(t)\| = \min\{\max_i \sum_j |a_{ij}(t)|, \max_j \sum_i |a_{ij}(t)|, t \geq t_0\}.$$

先介绍一个代数结果:

引理 实对称矩阵 A 的最大特征值 $\lambda_{\max}(A) \leq \|A\|$.

证 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ 是 A 的特征值 $\lambda \triangleq \lambda_{\max}(A)$ 的特征向量, $|\xi_{i_1}| \triangleq \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|$,

$Ax = \lambda x$ 的第 i_1 分量式是 $\sum_{k=1}^n a_{i_1 k} \xi_k = \lambda \xi_{i_1}$, 故有

$$|\lambda - a_{i_1 i_1}| |\xi_{i_1}| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^n a_{i_1 k} \xi_k \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^n |a_{i_1 k}| |\xi_k| \leq |\xi_{i_1}| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_1}}^n |a_{i_1 k}|.$$

在上述不等式两边消去 $|\xi_{i_1}|$ 并注意到 $|\lambda - a_{i_1 i_1}| \geq |\lambda| - |a_{i_1 i_1}|$, 因此

$$|\lambda| = |\lambda_{\max}(A)| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i_1 k}| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

对矩阵 A^T 用上述结果得

$$|\lambda| = |\lambda_{\max}(A)| \leq \max_j \sum_{k=1}^n |a_{kj}|.$$

注意到 A 是实对称阵及 $\|A\|$ 的定义, 引理成立. 证毕.

设 $\dot{A}(t) = \lambda P(t) + (1 - \lambda) Q(t)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\bar{A}(t) = A(t) - \dot{A}(t)$, $M(t) = Q(t) - P(t)$,

* 冶金部基础科学基金资助项目.

本文于 1993 年 7 月 26 日收到, 1994 年 3 月 28 日收到修改稿.

$a(t) = \|M(t) + M^T(t)\|$. 我们有

定理 1 若存在 $\lambda \in [0, 1]$, 使得 $t \geq t_0$ 时, $\lambda_{\max}(\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t) + \max(1 - \lambda, \lambda)a(t) \leq -\delta < 0$, $g(t) > 0$, 且 $\int_{t_0}^{+\infty} g(t)dt = +\infty$, 则时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)]$ 稳定, 即 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$.

证 由设可知, 对任意给定的 $A(t) \in N[P(t), Q(t)]$, 有 $A(t) = \dot{A}(t) + \bar{A}(t)$, 从而由引理知当 $t \geq t_0$ 时有

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}[A(t) + A^T(t)] &\leq \lambda_{\max}[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] + \lambda_{\max}[\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)] \\ &\leq \lambda_{\max}[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] + \|\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)\|.\end{aligned}$$

注意到 $P(t) \leq Q(t)$ 的定义及设知

$$-(1 - \lambda)M(t) \leq \bar{A}(t) = A(t) - \dot{A}(t) \leq \lambda M(t).$$

所以有

$$-(1 - \lambda)[M(t) + M^T(t)] \leq \bar{A}(t) + \bar{A}^T(t) \leq \lambda[M(t) + M^T(t)].$$

从而由 $\|A(t)\|$ 的定义得

$$\|\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)\| \leq \max(1 - \lambda, \lambda) \|M(t) + M^T(t)\| = \max(1 - \lambda, \lambda)a(t),$$

故 $\lambda_{\max}[A(t) + A^T(t)] \leq \max(1 - \lambda, \lambda)a(t) + \lambda_{\max}[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)]$.

对系统 $\dot{x} = g(t)A(t)x$ 作 Lyapunov 函数 $V = X^T X$ 并注意到定理 1 的条件, 我们有

$$\dot{V} \leq -\delta g(t)X^T X = -\delta g(t)V,$$

即

$$V(t) = V_0 \exp\left\{-\delta \int_{t_0}^t g(s)ds\right\}.$$

由定理 1 的条件知, $V(t) \rightarrow 0$ 即系统 $\dot{x} = g(t)A(t)x$ 的零解渐近稳定, 由 $A(t)$ 的任意性知, 时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$. 证毕.

例如设

$$\begin{aligned}\bar{P}(t) &= \begin{bmatrix} -1.1t & (1.8 + e^t - \frac{1}{8}\sin t)t \\ -(2.1 + e^t)t & -1.2t \end{bmatrix}, \\ \bar{Q}(t) &= \begin{bmatrix} -0.9t & (3.2 + e^t)t \\ -(1.9 + e^t)t & -0.8t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

对区间矩阵 $N[\bar{P}(t), \bar{Q}(t)]$, 取 $g(t) = t$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $t_0 = 1$, 则

$$P(t) = \begin{bmatrix} -1.1 & 1.8 + e^t - \frac{1}{8}\sin t \\ -2.1 - e^t & -1.2 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} -0.9 & 3.2 + e^t \\ -1.9 - e^t & -0.8 \end{bmatrix},$$

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 + e^t - \frac{1}{16}\sin t \\ -2 - e^t & -1 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.4 + \frac{1}{8}\sin t \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

从而

$$a(t) = \|M(t) + M^T(t)\| \leq 2.4 + \frac{1}{8}|\sin t|,$$

$$\lambda_{\max}[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] = -1.5 - \frac{1}{16}\sin t,$$

因此, 定理 1 的条件满足, 故无界时变区间矩阵 $g(t)N[\bar{P}(t), \bar{Q}(t)] \in S$.

下面研究具有分解的无界时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)]$ 的稳定性. 对 $n \times n$ 阶方阵

$A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$, 其中 $t \geq t_0$ 时, $a_{ij}(t)$ 连续有界, 定义其范数为

$$\|A(t)\|_F = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t))^{\frac{1}{2}}.$$

设 $P(t), Q(t)$ 具有下列分解

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots & P_{1r}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{r1}(t) & P_{r2}(t) & \cdots & P_{rr}(t) \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & \cdots & Q_{1r}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{r1}(t) & Q_{r2}(t) & \cdots & Q_{rr}(t) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

要研究 $g(t)N[P(t), Q(t)]$ 的稳定性, 对任意的 $A(t) \in N[P(t), Q(t)]$ 并设 $A(t)$ 与 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 有相对应的分解, 显见我们只要研究具有分解

$$\dot{X}_s = g(t)A_{ss}(t)X_s + \sum_{j=1, j \neq s}^r g(t)A_{sj}(t)X_j, \quad s = 1, 2, \dots, r \quad (2)$$

的大系统 $\dot{X} = g(t)A(t)X$ 的零解稳定性问题. 在系统(2) 中

$$X_s = (X_s^{(1)}, X_s^{(2)}, \dots, X_s^n)^T, \quad \sum_{s=1}^r = n, g(t) > 0.$$

设

$$\dot{A}_{ss}(t) = \lambda_s P_{ss}(t) + (1 - \lambda_s)Q_{ss}(t), \quad \lambda_s \in [0, 1],$$

$$\bar{A}_{ss}(t) = A_{ss}(t) - \dot{A}_{ss}(t), \quad M_{ss}(t) = Q_{ss}(t) - P_{ss}(t),$$

故

$$-(1 - \lambda_s)M_{ss}(t) \leq \bar{A}_{ss}(t) \leq \lambda_s M_{ss}(t).$$

若 $\dot{A}_{ss}(t) + \dot{A}_{ss}^T(t)$ 的特征值 $\lambda_s^{(k)}(t) \leq -\delta_s < 0, k = 1, 2, \dots, n_s, s = 1, 2, \dots, r$, 对系统

$$\dot{X}_s = g(t)\dot{A}_{ss}(t)X_s + g(t)\bar{A}_{ss}(t)X_s. \quad (3)$$

作 Lyapunov 函数 $V_s = X_s^T X_s$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_s |_{(3)} &\leq -\delta_s g(t)X_s^T X_s + g(t)X_s^T [\bar{A}_{ss}(t) + \bar{A}_{ss}^T(t)]X_s \\ &\leq -\delta_s g(t)X_s^T X_s + g(t)\|\bar{A}_{ss}(t) + \bar{A}_{ss}^T(t)\| X_s^T X_s. \end{aligned}$$

注意到 $\|\bar{A}_{ss}(t) + \bar{A}_{ss}^T(t)\| \leq \max(1 - \lambda_s, \lambda_s)\|M_{ss}^T(t) + M_{ss}(t)\|$, 故

$$\dot{V}_s |_{(3)} \leq -\delta_s g(t)X_s^T X_s + g(t)\max(1 - \lambda_s, \lambda_s)\|M_{ss}^T(t) + M_{ss}(t)\|.$$

设 $\bar{\delta}_s = \delta_s - \max(1 - \lambda_s, \lambda_s)\|M_{ss}^T(t) + M_{ss}(t)\| > 0, \delta = \min_{1 \leq s \leq r} \bar{\delta}_s$, 对系统(2) 取

$V = \sum_{s=1}^r V_s X_s^T X_s$ 作为 Lyapunov 函数, 则有

$$\dot{V} |_{(2)} \leq -\delta g(t) \sum_{s=1}^r \|X_s\|_2^2 + 2g(t) \sum_{s=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^r \|X_s\|_2 \|A_{sj}(t)\|_F \|X_j\|_2.$$

现设与 $A_{sj}(t) (s \neq j)$ 对应的 $P_{sj}(t)$ 和 $Q_{sj}(t)$ 中元素的绝对值的最大值为 $e (t \geq t_0$ 时), $\bar{n} = \max_{1 \leq s \leq r} n_s$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} |_{(2)} &\leq -\delta g(t) \sum_{s=1}^r \|X_s\|_2^2 + 2g(t)\bar{n}e \sum_{s=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^r \|X_s\|_2 \|X_j\|_2 \\ &= -\delta g(t) \sum_{s=1}^r \|X_s\|_2^2 + 2g(t)\bar{n}e (\sum_{s=1}^r \|X_s\|_2)_2^2 - 2g(t)\bar{n}e \sum_{s=1}^r \|X_s\|_2^2 \\ &\leq -(\delta - 2\bar{n}er + 2\bar{n}e)g(t) \sum_{s=1}^r \|X_s\|_2^2 \\ &= -(\delta - 2\bar{n}er + 2\bar{n}e)g(t)V. \end{aligned}$$

综上所述,我们有

定理2 如存在 $\lambda_s \in [0, 1]$, 使得 $t \geq t_0$ 时, $\dot{A}_{ss}(t) + \dot{A}_{ss}^T(t)$ 的特征值 $\lambda_s^{(k)} \leq -\delta_s < 0$, $P_{sj}(t)$ 与 $Q_{sj}(t)$ ($s \neq j$) 的元素的绝对值的最大值为 ε , $\bar{\delta}_s = \delta_s - \max(1 - \lambda_s, \lambda_s) \| M_{ss}(t) + M_{ss}^T(t) \| > 0$, $s = 1, 2, \dots, r$ 且 $\varepsilon < \delta/2n(r-1)$, $g(t) > 0$, $\int_{t_0}^{+\infty} g(t) dt = +\infty$, 则具有分解 (1) 的无界时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$. 这里 $\delta = \min_{1 \leq s \leq r} \bar{\delta}_s$, $\bar{n} = \max_{1 \leq s \leq r} n_s$, $M_{ss}(t) = Q_{ss}(t) - P_{ss}(t)$.

定理2中取 $g(t) \equiv 1$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \lambda$ 时, 可得文[2]中的结果. 显然, 当 $g(t) \equiv 1$ 时, 由于本文中参数 λ_s 可调节, 而文[2]中 $\lambda_s = \lambda$ ($s = 1, 2, \dots, r$) 故本文结果推广和改进了文[2]的工作并且结果更精致.

最后, 我们用矩阵测度来研究无界时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)]$ 的稳定性. 先给出矩阵测度的概念^[5], 一个实方阵 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ 的测度定义如下:

$$\mu(A(t)) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hA(t)\| - 1}{h}. \quad (I \text{ 为单位矩阵})$$

当上式中范数 $\|\cdot\|$ 分别是 \mathbb{R}^n 中的向量范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|x\|_\infty = \max|x_i|.$$

相应 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的诱导矩阵范数

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \quad \|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^* A)]^{\frac{1}{2}}; \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

时, 可计算出相应的矩阵测度为

$$\mu_1(A) = \max_j \left\{ a_{jj} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}} |a_{ij}| \right\};$$

$$\mu_2(A) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A^* + A);$$

$$\mu_\infty(A) = \max_i \left\{ a_{ii} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}} |a_{ij}| \right\}.$$

这里 A^* 表示 A 的共轭转置, $\lambda_{\max}(B)$ 表示 B 的最大特征值. 在本文中 $\mu_{1,\infty}(A)$ 表示为 $\mu_1(A)$ 或 $\mu_\infty(A)$, 但在同一不等式中出现几个 $\mu_{1,\infty}(A)$ 时表示同取测度 $\mu_1(A)$ 或 $\mu_\infty(A)$; $\mu(A)$ 表示可取 $\mu_1(A)$ 或 $\mu_2(A)$ 或 $\mu_\infty(A)$.

定理3 如存在 $\lambda \in [0, 1]$, 使得

$\mu_{1,\infty}(\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t) + \max(1 - \lambda, \lambda) \mu_{1,\infty}(M(t) + M^T(t))) \leq -\delta < 0$ 且 $g(t) > 0$, $\int_{t_0}^{+\infty} g(s) ds = +\infty$, 则无界时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$.

证 由设对任意的 $A(t) \in N[P(t), Q(t)]$, 有 $A(t) = \dot{A}(t) + \bar{A}(t)$, 而

$$\begin{aligned} \lambda[A(t) + A^T(t)] &= \lambda[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t) + \bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)] \\ &\leq \mu_{1,\infty}(\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)) + \mu_{1,\infty}(\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)). \end{aligned}$$

注意到 $-(1 - \lambda)(M(t) + M^T(t)) \leq \bar{A}(t) + \bar{A}^T(t) \leq \lambda(M(t) + M^T(t))$, 所以由 $\mu_1(A)$ 及 $\mu_\infty(A)$ 的定义知

$$\mu_{1,\infty}(\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)) \leq \max(1 - \lambda, \lambda) \mu_{1,\infty}(M(t) + M^T(t)).$$

因此由定理 3 的假设知

$$\lambda[A(t) + A^T(t)] \leq -\delta < 0.$$

对系统 $\dot{x} = g(t)A(t)x$ 取 Lyapunov 函数 $V = x^T x$, 有 $\dot{V} = x^T(A^T(t) + A(t))xg(t) \leq -\delta g(t)V$, 由于 $\int_{t_0}^{+\infty} g(s)ds = +\infty$, 故 $V \rightarrow 0$ 即 $\dot{x} = g(t)A(t)x$ 的零解渐近稳定, 注意到 $A(t)$ 的任意性, 故 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$. 证毕.

定理 4 如存在 $\lambda \in [0, 1]$, 使得

$$\mu_2[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] + \max(1 - \lambda, \lambda) \mu_{1,\infty}[M(t) + M^T(t)] \leq -\delta < 0,$$

且 $g(t) > 0$, $\int_{t_0}^{+\infty} g(s)ds = +\infty$, 则无界时变区间矩阵 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$.

证 对任意的 $A(t) \in N[P(t), Q(t)]$ 有

$$\begin{aligned} \lambda[A(t) + \bar{A}^T(t)] &\leq \mu_2[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] + \mu_2[\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)] \\ &= \mu_2[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] + \frac{1}{2}\lambda_{\max}[2\bar{A}(t) + 2\bar{A}^T(t)] \\ &\leq \mu_2[\dot{A}(t) + \dot{A}^T(t)] + \mu_{1,\infty}[\bar{A}(t) + \bar{A}^T(t)]. \end{aligned}$$

注意到定理 4 的假设及定理 3 的证明, 我们有 $g(t)N[P(t), Q(t)] \in S$. 证毕.

注 由于 $g(t)$ 可以是无界的, 故本文结果可用于一些无界时变区间矩阵. 如 $g(t) \equiv 1$, 则由本文结果可得到文[1~2]中的一些结果.

参 考 文 献

- [1] 孙继涛. 时变区间矩阵的稳定性. 应用科学学报, 1994, 12(1): 57—60
- [2] 孙继涛. 关于区间矩阵的稳定性. 自动化学报, 1991, 17(6): 745—748
- [3] Soh, C. B. . Correcting Argoun's approach for the Stability of Interval Matrices. Int. J. Control, 1990, 51(5): 1151—1154
- [4] 张银萍, 孙继涛. 具分解的区间矩阵的稳定性. 纯粹数学与应用数学, 1994, 10(1): 21—26
- [5] Vidyasagar, M. . Nonlinear Systems Analysis. Prentice-Hall, Inc., 1978

Stability of Time-Varying Interval Matrices

SUN Jitao and ZHANG Yiping

(East China Institute of Metallurgy • Anhui Ma'anshan, 243002, PRC)

Abstract: In this paper, we research stability of unbounded time-varying interval matrix, the sufficient conditions of stability about unbounded time-varying interval matrix and interval matrix decomposed are obtained, the results of the paper [1~2] are extended and improved.

Key words: time-varying interval matrix; stability; sufficient condition

本文作者简介

孙继涛 1963年生,1983年7月在南京大学数学系获理学学士后分配至华东冶金学院数学教研室任教,现为华东冶金学院副教授,目前研究兴趣为常微分方程定性理论,常微分差分方程的稳定性理论等,近年来在国内外发表学术论文四十余篇。

张银萍 1962年生,1983年7月在安徽大学数学系获理学学士后分配在华东冶金学院数学教研室任教,1989年3月在南京理工大学获工学硕士学位,现为华东冶金学院讲师,目前对鲁棒控制理论感兴趣,近年来,已在国内外发表学术论文十余篇。

中国自动化学会第十届青年学术年会纪要

中国自动化学会第十届青年学术年会于1994年8月21日至25日在西北工业大学召开。此届年会由西北工业大学自动控制系和陕西省自动化学会承办。来自全国各地的120余名论文作者、特邀代表、有关领导以及自动化领域的专家、教授参加了会议,其中包括专程从美国、香港及挪威等地回国参加会议的海外华人青年学者5人。

本次年会在全国自动化领域,尤其是在广大青年科技工作者中产生了较大反响,自1993年12月向国内外有关单位和个人发出征文通讯以及在《自动化学报》、《控制理论与应用》、《信息与控制》、《控制与决策》和《西北工业大学学报》等学术刊物登载征文通知以来,共收到来自国内外一百多所高等院校,科研机构和大中型企业的论文320余篇,其中包括来自美国、香港和新加坡等地青年学者的论文9篇。经大会程序委员会认真审定,最后共收录论文214篇,其中不乏达到国内和国际先进水平的论文。年会论文集《自动化理论、技术与应用》由西北工业大学出版社出版、发行。

1994年8月22日上午在西北工业大学新落成的国际会议厅举行了大会开幕式。郑应平研究员等分别在会议期间的三个上午做了十一个大会报告,论文作者在两个下午按论文集中的十二类专题分成六个组进行了分组学术交流与专题讨论,以论文宣读与讨论相结合的方式进行了学术交流。

会议期间,大会组织与会代表参观了西安卫星测控中心和西北工业大学科技成果展览、翼型风洞及消声水池等国防重点实验室,会议还组织了部分高新科技成果展示与介绍,组织代表参观了西安名胜古迹。

本届年会的圆满、成功举行,得到了老一辈科学家,中国自动化学会特别是青年工作委员会、陕西省自动化会、各协办单位及西北工业大学有关部门的热情关怀和大力支持。在此,年会组织委员会、程序委员会向给予本届年会热情支持和资助的单位和个人表示衷心的感谢!

中国自动化学会第十届青年学术年会
组织委员会、程序委员会