第 12 卷第 1 期
1995 年 2 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 12, No. 1
Feb., 1995

奇异不确定系统的滑动模态控制*

温香彩　刘永清
(华南理工大学自动化系·广州,510641)

摘要：本文首先建立了奇异系统的能控规范受限等价分解形式,然后基于此形式,研究了线性奇异不确定系统在满足匹配条件时的变结构控制综合设计问题,提出了设计切换函数和变结构控制的新方法,设计过程简单,易于实现.最后给出了一个数值例子加以说明.

关键词：奇异系统；变结构控制；受限等价；强能控

1 引　　言

七十年代以来,由于奇异系统在经济[1]、电力[2]、机器人[3]等领域的应用,引起了国外数学界[4]及国内外控制界[5~8]、工程界[2]等学者的关注,且已取得了一些结果,但由于奇异系统本身的复杂性,它的研究要比正常系统同类问题的研究困难得多.在很多方面目前还处于初创阶段。对于定常线性奇异控制系统,以前的研究大都集中在系统结构与参数已知的基础上,采用传统的状态反馈(见[5]及[5]后的参考文献).因此,设计出的控制鲁棒性差,对系统的参数变化与外部干扰较敏感.而变结构控制具有对内外部扰动及参数变化的自适应性[9],因此,对奇异系统设计变结构控制既具有理论价值又具有实际意义.文[7]为这方面最早的文献.在[7]中,基于[5]中建立的奇异系统的第二种受限系统等价形式,通过引进滑动模动态补偿器,给出了奇异系统变结构控制的综合方法.但这种方法设计出的 切换函数使滑动模运动一方面阶数高(等于系统的阶数),另一方面依赖于控制量.因此,给滑动模运动动态品质的研究及控制器的选取带来一定的困难(特别是对高阶系统).本文基于所建立的奇异系统的新的能控规范受限等价分解形式,设计出了与[7]不同的切换函数和变结构控制律,整个设计简单,易于实现.

2 预备知识

考虑系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu + \Delta A(x) + \Delta Bu + Df. \tag{1}$$

这里,$x \in \mathrm{R}^n$ 为系统的状态向量,$u \in \mathrm{R}^m$ 为系统的控制输入向量,$f \in \mathrm{R}^r$ 为系统的外部扰动.E,A,B 和 D 为相容维数的常值矩阵,E 为奇异阵,$\mathrm{rank}E = r < n$.$\Delta A(x) \in \mathrm{R}^n$ 和 $\Delta B \in \mathrm{R}^{n\times m}$ 为系统的不确定量.

为方便起见,用三元矩阵组(E,A,B)表示(1)式的未受干扰理想系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu.$$

本文作如下假设：

假设 1　(E,A,B)强能控,B 列满秩.

假设 2　$\det(\lambda E - A) \not\equiv 0$,$\lambda$ 为复数.

* 国家教委博士点专项基金赞助
本文于 1993 年 9 月 30 日收到,1994 年 9 月 15 日收到修改稿.

假设 3　$\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}(B, \Delta A) = \mathrm{rank}(B, \Delta B) = \mathrm{rank}(B, D)$.

假设 4　不确定项有界、即存在有界函数 $\rho(x,t)$，$\| \Delta A(x) + \Delta Bu + Df \| \leqslant \rho(x,t)$.

假设 3 称为完全匹配条件，由此条件知，存在 $F \in \mathrm{R}^{m\times 1}, G \in \mathrm{R}^{m\times m}, H \in \mathrm{R}^{m\times r}$ 使得

$$\Delta A(x) = BF(x), \quad \Delta B = BG, \quad D = BH.$$

令

$$\eta = F(x) + Gu + Hf.$$

则系统(1) 可简记为

$$E\dot{x} = Ax + B(u + \eta). \tag{2}$$

我们的目的就是在假设 1 ～ 4 的条件下，设计变结构控制

$$u = \begin{cases} u^+, & S > 0, \\ u^-, & S < 0. \end{cases}$$

使(1) 式的闭环系统具有所希望的动态品质.

给出下节的综合设计之前，首先建立系统的新的受限等价分解.

引理 1　若(E,A,B) 强能控，B 列满秩，且假设 3 成立，则存在非奇异矩阵 Q,R，使系统(2) 受限制等价于

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \tag{3}$$

$$E_2\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \eta. \tag{4}$$

且(A_{11}, A_{12}) 能控，这里

$$QAR = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad QER = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \quad QB = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad x = R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

I_m 和 I_{n-m} 分别为 $m \times m$，$(n-m) \times (n-m)$ 单位矩阵.

证　此证明是构造性的. 由(E,A,B) 强能控知

$$\mathrm{rank}(\lambda E - A \quad B) = n, \quad \mathrm{rank}(E \quad B) = n. \tag{5}$$

由 B 列满秩，不失一般性，假设 $B = (B_1 \quad B_2)^{\mathrm{T}}$，$B_2$ 可逆. 令

$$Q_1 = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1B_2^{-1} \\ 0 & B_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

则

$$Q_1B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad Q_1E = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(E \quad B) &= \mathrm{rank}(Q_1E \quad Q_1B) \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & 0 \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} & I_m \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}(\tilde{E}_{11} \quad \tilde{E}_{12}) + m. \end{aligned} \tag{6}$$

由(5)，(6) 得　$\mathrm{rank}(\tilde{E}_{11} \quad \tilde{E}_{12}) = n - m$. 故存在矩阵 $H = (H_1 \quad H_2)$，$H_1 \in \mathrm{R}^{m\times(n-m)}$，$H_2 \in \mathrm{R}^{m\times m}$，使

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

可逆. 令

$$R=\begin{pmatrix}\widetilde{E}_{11} & \widetilde{E}_{12}\\ H_1 & H_2\end{pmatrix}^{-1}.$$

则

$$Q_1ER=\begin{pmatrix}I & 0\\ \hat{E}_{21} & \hat{E}_{22}\end{pmatrix},\quad Q_1AR=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{pmatrix}.$$

取

$$Q=\begin{pmatrix}I_{n-m} & 0\\ -\hat{E}_{21} & I_m\end{pmatrix}Q_1,$$

则

$$QER=\begin{pmatrix}I_{n-m} & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix},\quad QAR=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\quad QB=\begin{pmatrix}0\\ I_m\end{pmatrix}.$$

这里 $E_2=\hat{E}_{21},\quad A_{21}=-\hat{E}_{21}A_{11}+\overline{A}_{21},\quad A_{22}=-\hat{E}_{21}A_{12}+\overline{A}_{22}.$

下证(A_{11},A_{12})能控,由 PBH 秩判据,只需证明

$$\mathrm{rank}(\lambda I_{n-m}-A_{11}\quad A_{12})=n-m \tag{7}$$

即可. 而

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\lambda E-A\quad B)&=\mathrm{rank}(\lambda QEP-QAR\quad QB)\\ &=\begin{bmatrix}\lambda I_{n-m}-A_{11} & -A_{12} & 0\\ -A_{21} & \lambda I_m-A_{22} & I_m\end{bmatrix}\\ &=\mathrm{rank}(\lambda I_{n-m}-A_{11}\quad A_{12})+m.\end{aligned}$$

注意到(5),即得(7). 证毕.

3 综合设计

在本文假设条件下,(1)的综合设计问题可化为(3),(4)的综合设计问题. 利用变结构控制方法进行综合,可分为两步:第一步设计切换函数,使系统在切换流形 $S=0$ 上的滑动模运动具有所希望的动态品质;第二步设计变结构控制律,使系统在有限时间内到达切换流形,实现滑动模运动. 下面首先利用二次型最优综合的 Lyapunov 函数方法设计线性切换函数,然后引入新的控制输入,完成综合设计变结构控制的目的.

由(A_{11},A_{12})能控,存在 K_1,使

$$\sigma(A_{11}+A_{12}K_1)\subset \mathrm{C}^-. \tag{8}$$

这里 $\sigma(\cdot)$ 为$(\cdot)$的特征值,C^- 为左半复平面.

由(8)知,Lyapunov 矩阵方程

$$P(A_{11}+A_{12}K_1)+(A_{11}+A_{12}K_1)^{\mathrm{T}}P=-I_{n-m}-K_1^{\mathrm{T}}K_1. \tag{9}$$

有对称正定解 P,构造 Lyapunov 函数 $V=x_1^{\mathrm{T}}Px_1$,则沿着方程(3)的解的轨道,$J=\min\limits_{x_2}(\dot{V}+x_2^{\mathrm{T}}x_2)$ 有解 $x_2=-A_{12}^{\mathrm{T}}Px_1$, 且此解使

$$\dot{x}_1=(A_{11}-A_{12}A_{12}^{\mathrm{T}}P)x_1 \tag{10}$$

稳定. 设计切换函数

$$S = A_{12}^{\mathrm{T}} P x_1 + x_2. \tag{11}$$

则在切换面 $S = 0$ 上,滑动模运动方程为(10),故稳定.

下面设计变结构控制策略 u.

由假设1及引理1,存在 K_2 使 $\| E_2 + K_2 \| \neq 0$,令

$$u = - K_2 \dot{x}_2 + v. \tag{12}$$

v 为新的控制输入,(12) 代入(4),并整理得

$$\dot{x}_2 = \hat{A}_{21} x_1 + \hat{A}_{22} x_2 + \hat{B}_2 v + \hat{\eta}. \tag{13}$$

这里

$$\hat{A}_{21} = (E_2 + K_2)^{-1} A_{21}, \quad \hat{A}_{22} = (E_2 + K_2)^{-1} A_{22},$$
$$\hat{B}_2 = (E_2 + K_2)^{-1}, \quad \hat{\eta} = (E_2 + K_2)^{-1} \eta.$$

沿着(3),(13) 的解对 S 求导,得

$$\dot{S} = A_{12}^{\mathrm{T}} P (A_{11} x_1 + A_{12} x_2) + \hat{A}_{21} x_1 + \hat{A}_{22} x_2 + \hat{B}_2 v + \hat{\eta}.$$

选取 v 为

$$\begin{aligned} v = &- \hat{B}_2^{-1} [(A_{12}^{\mathrm{T}} P A_{11} + \hat{A}_{21}) x_1 + (A_{12}^{\mathrm{T}} P A_{12} + \hat{A}_{22}) x_2 \\ &+ \varepsilon \operatorname{sgn} S + \hat{\rho} \operatorname{sgn} S], \end{aligned} \tag{14}$$
$$\hat{\rho} = \| (E_2 + K_2)^{-1} \| \ \| B \|^{-1} \rho, \quad \varepsilon > 0.$$

则

$$S^{\mathrm{T}} \dot{S} = - S^{\mathrm{T}} \hat{\rho} \operatorname{sgn} S - S^{\mathrm{T}} \varepsilon \operatorname{sgn} S + S^{\mathrm{T}} \hat{\eta} \leqslant - \varepsilon S^{\mathrm{T}} \operatorname{sgn} S.$$

由[9]得

定理 对系统(1),在假定 1 ~ 4 条件下,存在切换函数(11) 和变结构控制(12),(14),使得(1) 的闭环系统稳定.

注 1 在本文提出了一种新的设计切换函数方法 —— 二次型最优综合的 Lyapunov 函数方法. 此方法既不同于[7] 中的动态切换函数法,又与正常系统已存在的极点配置法、最优控制法互不包含. 例如:对极点配置法. 当 A_{11} 稳定时,我们这里可选 $K_1 = 0$,而极点配置法却在 $K_1 = 0$ 时,切换函数不存在. 另外,本文提出的方法只需求解 Lyapunov 矩阵方程,而最优控制法却需求解 Riccati 矩阵方程,而 Lyapunov 方程的求解当然要比 Riccati 方程的求解简便的多.

注 2 当 ρ 很大时,设计的不连续控制可能引起强烈的抖动,导致不稳定. 对此,引进边界层 $\| S \| \leqslant \alpha$,用饱和函数 sat 代替不连续的符号函数 sgn.

例 考虑如下形式的三维奇异系统

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u + \Delta A x + \Delta B u + D f), \tag{15}$$
$$\| \Delta A x + \Delta B u + D f \| \leqslant 0.2 x_3^2 e^{-t}.$$

易验证,定理的条件皆成立,取

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

则(15)的能控规范受限等价形式为

$$\hat{x}_1^1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\hat{x}_1+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\hat{x}_2,$$

$$0=(0\quad 1)\hat{x}_1+u+\eta.$$

这里

$$\hat{x}_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix},\quad \hat{x}_2=x_2,\quad \eta=\Delta Ax+\Delta Bu+Df.$$

取 $K_1=(4\quad -3)$，则 Lyapunov 矩阵方程(9)之解为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{21}{2} & -\frac{19}{4}\\ -\frac{19}{4} & \frac{13}{4}\end{pmatrix}.$$

切换函数 S 和控制 u 分别为

$$S=-\frac{19}{4}x_1+x_2+\frac{13}{4}x_3.$$

$$u=-\dot{x}_2+\frac{19}{4}x_1-\frac{13}{4}x_2-\frac{23}{4}x_3-0.2x_3^2\operatorname{sgn}S.$$

4 结束语

本文首次建立了奇异系统的能控规范受限等价形式.基于此形式，根据二次型综合的Lyapunov 函数方法，设计了线性切换函数和变结构控制律.设计过程简单，易于实现.希望本文所建立的能控规范受限分解形式对奇异系统的变结构控制研究起到某些推动作用.

参 考 文 献

[1] 张金水.广义系统经济控制论.北京:清华大学出版社,1990

[2] Hill, D. J. and Mareels, I. M. Y.. Stability Theory for Differential /Algebraic Systems with Application to Power Systems. IEEE Trans. Circuit & Systems, 1990, 37(11):1416—1423

[3] Mills, J. K. and Goldenberg, A. A.. Force and Position control of Manipulators During Constrained Motion Tasks. IEEE Trans. Robotics & Automation, 1989, 5(1):30—46

[4] Campbell, S. I.. Singular systems of differential Equation Ⅱ. Pitman, 1982

[5] Dai, L.. Singular Control Systems. Springer-Verlag, 1989

[6] Lewis, F.. A Survey of Linear Singular Systems. Circuits, Sys. & Sig. Processing, 1986, 5:3—36

[7] 胡跃明,周其节,刘永清.广义系统的变结构控制.控制理论与应用,1993, 10(5):567—572

[8] 王朝珠,戴立意.广义动态系统.控制理论与应用, 1986, 3(1):2—12

[9] 高为炳.变结构控制理论基础.北京:中国科学技术出版社,1990

Sliding Mode Control for Singular Uncertainty Systems

WEN Xiangcai and LIU Yongqing

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: The controllability with restricted equivalent decomposition form of singular systems is established at first, and based on this form the synthesis problem of variable structure control for a linear singular uncertainty system is then studied. The novel design algorithms of switching function and variable structure control are presented. The control implementation is relatively simple. A design example is given.

Key words: singular systems; variable structure control; restricted equivalent; strongly controllable.

本文作者简介

温香彩 1964年生. 分别于1984年、1989年在河南师范大学数学系、西北大学数学系获学士、硕士学位. 1992年入华南理工大学自动化系攻读博士学位. 研究工作包括离散系统的稳定与控制, 广义系统的变结构控制等.

刘永清 见本刊1995年第1期第69页.

1995年中国智能自动化学术会议论文清稿规格及要求

1. **直接制版** 论文须为可供直接照相制版的清稿(此稿不退). 为此, 清稿须用激光打印机在A4白纸上单面打印, 清稿的打印区尺寸统一规定为: 高为210毫米, 宽为145毫米. 打印区外不能印任何字迹或图纸.

2. **题目** 题目一律居中用4号黑体字, 其余均用5号字.

3. **作者姓名和单位** 文题下空两行印作者姓名, 其下(不空行)印作者单位名.

4. **摘要** 作者单位名下空两行印摘要. 格式: 先印"摘要"二字, 后空二字开始印摘要的内容. 建议勿超过10行.

5. **正文** 由于论文数量较多, 建议每篇论文篇幅勿超过6页.

6. **节和节标题** 正文可以分为若干节, 每节有一个节标题. 节可编号可不编号. 节标题从打印区边线缩进15毫米(不要居中).

7. **参考文献** 参考文献列于正文之后, 内容依次为: 编号、作者、题目、出版单位(或期刊、或会议), 年份.

8. **图和图题** 若图不能直接在文中排版, 可以贴在正文中, 也可附在全稿最后(参考文献和附录之后). 图号打印在图下方, 与文呼应. 图题可有可无.

9. **页码** 页码打在论文清稿下方居中. 在清稿每页打印区以外的右上角用铅笔写上第一作者的姓名和论文题目的前几个字.