第 12 卷第 1 期　　控制理论与应用　　Vol. 12, No. 1
1995 年 2 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Feb., 1995

结构型摄动多项式族的不变惯性

赵克友　张炳煜
(青岛大学电气工程系·青岛,266071)

摘要: 给了一个结构型摄动多项式族以及复平面上的稳定性区域,是否这个族在这区域的内部,边界与外部有着不变的根的数目?这是所谓的不变惯性问题,本文将予回答.在否定的情况下,我们要给出方法去把这族分割为一些子族使对每一子族而言它有着各自不变的惯性.

关键词: 结构型摄动; 多项式; 根分布; 不变惯性

1 问　　题

设 D 为复平面上的一个稳定性区域,它由若干个单连通集所组成,至少包含一个实点且对称于实轴.比照用 $j\omega:\omega\in(-\infty,+\infty)$ 来参量化左半复平面的边界(虚轴),我们可引进一个"广义频率 α"来参量区域 D 的边界 ∂D. 注意 ∂D 可能是由若干连续段 $(\partial D)_k$, $k=1,2,\cdots$ 所组成,其中有的可能是闭围道,有的可能是延伸至无穷远的曲线.设第 k 段的参量化表达式为

$$s(\alpha)=\sigma(\alpha)+j\omega(\alpha),\quad \alpha\in I_k. \tag{1}$$

这里 I_k 为 $(\partial D)_k$ 这一段所对应的参数 α 的取值区间,$\sigma(\alpha)$ 与 $\omega(\alpha)$ 皆是广义频率 α 的连续函数.令 I 是诸 I_k 之并集,当 α 遍扫全 I 时,(1) 式依次描画出 ∂D 的各段.许多重要稳定性 D 的边界参量表达式由文[1]与[2]给出.

记区域 D 的补集为 D^c,若一个 n 阶多项式 $p(s)$ 在 $D,\partial D$ 与 $D^c\backslash\partial D$ 上的根的数目分别为 ξ,ζ 与 η,则称三元数 (ξ,ζ,η) 为 $p(s)$ 的惯性数,记为 $\mathrm{In}p(s)=(\xi,\zeta,\eta)_D$;若对一个多项式族 $\mathscr{P}$ 存在恒定不变的三元数 (ξ,ζ,η) 使对 $\mathscr{P}$ 中的任一成员 $p(s)$ 都有 $\mathrm{In}p(s)=(\xi,\zeta,\eta)_D$,则称 $\mathscr{P}$ 有着不变的惯性[3,4],并简记为 $\mathrm{In}\mathscr{P}=(\xi,\zeta,\eta)_D$,在不致引起混淆时,常可略去下标 D. 显然 $\mathscr{P}$ 有不变惯性的必要前提是它有不变的阶次.

考虑如下 n 阶不确定特征多项式

$$p(s,q)=a_0(q)+a_1(q)s+\cdots+a_n(q)s^n. \tag{2}$$

其中 $a(q)=[a_0(q),a_1(q),\cdots,a_n(q)]'$ 为系数空间 R^{n+1} 的向量函数,它连续地依赖于不确定向量 $q=[b_1,b_2,\cdots\cdots,b_l]'$,而 q 取值于参数空间 R^l 中的某个闭区域 Q,不失一般性,设 $a_n(q)>0,\forall\ q\in Q$,于是(2) 确定了如下 n 阶实多项式族

$$\mathscr{P}\triangleq\{p(s,q)\,|\,q\in Q\}. \tag{3}$$

问题 1　如何判定 $\mathscr{P}$ 关于 D 有着不变惯性?

问题 2　若 $\mathscr{P}$ 不具有不变惯性,如何将其分割为一些极大子族,使对每一子族有着不变惯性?

显然,上述两个问题是比单纯鲁棒 D 稳定意义下更为广泛的一类问题.周知,在使用

本文于 1993 年 7 月 12 日收到,1994 年 3 月 28 日收到修改稿.

频域稳定性判据时，如奈氏判据或圆判据等，首先须确定开环系统不稳定极点数，当系统遭受摄动时，自然涉及到开环传函分母多项式的不变惯性了. 文[3,4] 分别就区间多项式族关于左半复平面及左扇区的不变惯性给出了可用判据；文[1] 讨论了多项式多面体关于一般区域 D 的根分布不变性，并给出推广的棱边定理. 本文欲对问题 1 与 2 给出原则性判别法，某些特殊情况的判别计算将另文发表.

2　问题的解答

任给 $\alpha \in I$ 确定了 ∂D 上的一点 $s(\alpha)$，与它对应的参数空间中的点集为

$$Q_{im}(\alpha) \triangleq \{q \mid p(s,q) = 0, s = s(\alpha)\}.$$

整个边界 ∂D 在参数空间中确定了如下集合

$$Q_{im} \triangleq \{q \mid p(s,q) = 0, \forall\, s \in \partial D\}.$$

显然有 $Q_{im} = \bigcup_{\alpha \in I} Q_{im}(\alpha)$. 注意，$Q_{im}(\alpha)$ 是 R^l 中与 ∂D 上点 $s(\alpha)$ 相对应的一些点，当 α 遍扫 I 时，这些点走过的轨迹便形成了 R^l 中的一些超曲面. 由于对 $\forall\, q \in Q_{im}$，多项式 $p(s,q)$ 必在 ∂D 上至少有一根，因此称 Q_{im} 为参数空间中的边界超曲面. 利用多项式根对参数的连续依赖关系，不难证明下述结论（证略）.

定理 1　若存在整数 $r, 0 \leqslant r \leqslant n$，使 $\mathrm{In}\mathscr{P} = (r, 0, n-r)$ 当且仅当 i) 至少存在一个 $q_0 \in Q$ 使 $\mathrm{In}p(s,q_0) = (r, 0, n-r)$；ii) $Q \cap Q_{im} = \varnothing$，即 Q 与 Q_{im} 无交.

若 Q 与 Q_{im} 无交，依定理 1，$\mathscr{P}$ 必有不变惯性且就等于其任一成员 $p(s,q) \in \mathscr{P}$ 的惯性数. 若 $Q \cap Q_{im} \neq \varnothing$，则 Q 便被超曲面 Q_{im} 分割成一些连通子集 $Q_k, k = 1, 2, \cdots, m$，与此相对应，$\mathscr{P}$ 也被分割成如下一些子族

$$\mathscr{P}_k \triangleq \{p(s,q) \mid q \in Q_k \backslash \partial Q_k\}, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, m,$$

于是我们有

定理 2　$\mathscr{P}$ 的每一子族 $\mathscr{P}_k$ 皆有其各自不变的惯性数，且就等于 $\mathscr{P}_k$ 中任取一个成员的惯性数.

定理 1 与 2 分别是问题 1 与 2 的解答，但只是原则性的，详细解答要依赖于对 Q_{im} 的计算表示.

3　需研究的问题

上节结论中边界超曲面 Q_{im} 起关键作用，在一般情况下想解析计算它并非一件容易的事，它与多项式(2) 诸系数对 q 的依赖复杂性，q 维数的高低以及区域 D 边界参量表达式的复杂程度有关. 下面一些重要特例是值得深入研究的.

T1：$\underline{a}(q)$ 仿射线性依赖于 q 的各分量，对整族 $\mathscr{P}$ 的不变惯性的检验可用推广的棱边定理[1,5].

T2：$q = q$ 是一维的，而 $a(q)$ 是 q 的多项式向量函数，此时 Q_{im} 不过是参数轴上的一些孤立点.

T3：$\underline{a}(q)$ 是 $q_1, \cdots, q_l$ 的多线性向量函数.

T4：对于 q 的任意分量 q_i，$\underline{a}(q)$ 都是 q_i 的多项式向量函数.

须指出的是文[2] 所提供的“边界表示定理”可有助于计算 T3 与 T4 问题中的 $Q_{im}(\alpha)$. 另外一个重要的问题是：设 $p(s,q_0)$ 在 ∂D 上无根，试确定以 q_0 为中心，R^l 中范数 $\|\cdot\|_p$ 意

义下的最大邻域球 $N(q_0,r^*) \triangleq \{q \mid \| q-q_0 \|_p < r^*\}$ 使对 $\forall\, q \in N(q_0,r^*)$ 有 $\mathrm{In}p(s,q) = \mathrm{In}p(s,q_0)$ 且在边界球面 $\partial N(q,r^*)$ 上至少有一点 q 使 $\mathrm{In}p(s,q) \neq \mathrm{In}p(s,q_0)$.

参 考 文 献

[1] 王龙，黄琳. 多项式族的根分布不变性. 中国科学(A)，1993，23(1)：75—82

[2] Ackermann, D. K. and Muench, R.. Robust Gamma-Stability Analysis in a Plant Paramter Space. Automatica, 1991, 27(1):75—85

[3] Barmish, B. R. and Shi, Z.. On the Zero Exclusion Condition in Robust Stability Analysis: The Invariant Inertia Problem. ASME J., 1988, 88-WA/DSC-13:1—3

[4] 赵克友. 区间多项式左扇区的稳定鲁棒性及不变惯性定量. 自动化学报，1993，19(5)：604—608

[5] Foo, Y. K. and Soh, Y. C.. Characterization of Zero Locations of Polytopes of Real Polynomials. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(8):1227—1230

On Invariant Inertia Property of a Family of Polynomials with Structured Perturbations

ZHAO Keyou and ZHANG Bingyu

(Department of Electrical Engineering, Qingdao University. Qingdao, 266071, PRC)

Abstract: Given a family of polynomials with structured perturbations, and a stability region in the complex plane, whether the family has invariant root numbers with respect to the interior, the boundary and the exterior of the region? The paper answers the so-called invariant inertia question. In a negative case, the paper gives a method which splits the family into a series of subfamilies so that every one in the series has its own invariant inertia.

Key words: structured perturbation; polynomial; root distribution; invariant inertia

本文作者简介

赵克友 1945年生. 1968年毕业于山东大学数学系. 1978年前从事过电气产品的研制，电站及电网的设计维护与管理等工作. 1978年以来先后任教于山东大学控制论专业，青岛大学应用数学专业及电气技术专业，期间曾赴美国有关大学访问进修. 现任青岛大学电气工程系教授，专业兴趣为：控制系统理论，电气控制，微机应用及应用数学，近期研究区域为鲁棒控制，计算机实时控制与管理系统.

张炳煜 1962年生. 1984年毕业于东北林业大学自动化系. 1987年于哈尔滨船舶工业学院自动控制系研究生毕业并获硕士学位，现为青岛大学电气工程系讲师，曾从事过自控理论的研究及多项计算机应项目的开发，目前的兴趣是人工神经元网络和生物医学仪器.