# 具有最小增益最优鲁棒控制器的设计*

王耀青

(华中理工大学动力系·武汉, 430074)

**摘要**: 在具有不确定参数系统鲁棒控制器设计方法的研究领域中所要解决的问题主要有两个方面,首先就是要求具有不确定参数系统的闭环控制是稳定的,其次是要求所设计的控制器或给出的解存在的充分条件越不保守越好. 本文将首先给出一种鲁棒控制器解存在的充分条件以及相应的优化问题解法,并且通过定义最小状态反馈系数矩阵将鲁棒控制器的系数矩阵的增益设计到最小的程度.

**关键词**: 不确定系统; LQ 最优控制; 最优鲁棒控制器; 最小反馈增益

## 1 引　　论

众所周知,为了设计一个稳定的线性状态反馈控制器,只要适当地定义一个二次性能指标函数,并运用 LQ 最优控制理论中的结果就可以达到目的. 由于这一性质,具有不确定参数系统的最优状态反馈控制器的设计方法大多是基于这一思想基础[1~5],这就是所谓的基于 LQ 问题的最优鲁棒控制器的设计方法.

最初引入这种设计方法的是文献[1]. 在假定系统的不确定参数属于某一给定有界域的条件下,通过适当地定义系统的不确定参数上界达到把具有不确定参数系统的鲁棒控制器设计问题变为类似于 LQ 最优控制器的设计问题. 后来,这一研究方法又在文献[4]和[5]中得到进一步的发展,并在[5]中对这种方法解的收敛性问题作了证明. 尽管如此,如何确定最优鲁棒控制器的解还缺乏一种较为系统而有效的途径. 尽管在[5]中给出了一种迭代求解思想,但没有讨论如何确定使得算法收敛所必需的初始值问题. 除此之外,这类研究思想仍然具有很大的保守性.

本文同样是在 LQ 意义下研究如何设计最优鲁棒控制器问题,但所采取的方法有别于文献[1~5]. 文中从 LQ 逆问题观点出发,首先将系统满足稳定的充分条件化为一类优化问题来实现,通过解优化问题达到设计具有不确定参数系统的最优鲁棒控制器的目的. 此外,我们还用迭代求解代数 Riccati 矩阵方程解的思想,给出具有最小增益最优鲁棒控制器的设计方法. 文中对使迭代过程收敛的初值问题作了深入的研究.

## 2 问题的提法

考虑一类具有不确定参数的线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A_0 + \Delta A(r))x + B_0 u \tag{1}$$

* 国家教委博士点专项基金资助课题.

本文于 1992 年 2 月 15 日收到, 1994 年 11 月 19 日收到修改稿.

的最优鲁棒控制器的设计问题，式中 $x \in R^n$ 和 $u \in R^m$ 分别是状态及控制变量；$A_0, \Delta A(r)$，$B_0$ 均为适当维数的矩阵，$r \in R^\rho$ 为不确定参数矢量，并假定

i) 系统的状态系数矩阵 $A(r)$ 可以线性表示为：

$$\Delta A(r) = \sum_{i=1}^{\rho} r_i A_i, \quad |r_i| \leqslant \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, \rho, \tag{2}$$

式中 $A_i$ 为 $n \times n$ 维的常数矩阵，$\bar{r}_i$ 为不确定参数 $r_i$ 的上界，$i = 1, 2, \cdots, \rho$；

ii) 对于 $r_i, |r_i| \leqslant \bar{r}_i$，矩阵对 $[A, B]$ 可控，$[Q^{1/2}, A]$ 可观，且 $(Q^{1/2})^T Q^{1/2} = Q$.

本文所要解决的问题是如何设计状态反馈控制器

$$u = -Kx, \tag{3}$$

使得闭环控制系统

$$x = (A - B_0 K)x \tag{4}$$

是鲁棒稳定的．根据这一提法，本文将利用 LQ 最优控制理论，从 LQ 逆问题观点出发设计最优鲁棒控制器(3)．由 LQ 最优控制理论可知，系统(1) 的最优状态反馈控制器为

$$u = -Kx, \tag{5a}$$

$$K = R^{-1} B_0^T P. \tag{5b}$$

式中的矩阵 $P$ 为代数矩阵 Riccati 方程

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B_0^T P + Q = 0 \tag{6}$$

的唯一对称正定解．对于实际问题，由于矩阵 $A$ 中具有不确定参数 $r$，因而无法由(6) 式求解矩阵 $P$. 基于这种原因，定义方程

$$A_0^T P + PA_0 - PBR^{-1} B_0^T P + Q_0 = 0. \tag{7}$$

从 LQ 最优控制的逆问题观点来看，如果存在某一对称非负定的矩阵 $Q_0$ 使得矩阵 $Q$ 满足

$$Q = Q_0 - \left(\sum_{i=1}^{\rho} r_i A_i^T P + P \sum_{i=1}^{\rho} r_i A_i\right) \geqslant 0, \tag{8}$$

并定义矩阵 $P$ 为(7) 的唯一对称正定解，则(5) 是在 LQ 意义下的最优状态反馈控制器．本文将研究这种思想下的最优鲁棒控制器的设计方法.

## 3 基本定义和结论

**定义 1** 如果控制器(5) 使得闭环控制系统(4) 稳定，则称控制器(5) 是系统(1) 的最优鲁棒稳定控制器.

**定理 1** 控制器(5) 是系统(1) 的最优鲁棒稳定控制器的充分条件是存在对称非负定矩阵 $Q_0$ 以及代数 Riccati 矩阵方程(7) 的唯一对称正定解 $P$ 满足(8) 式.

证 将(8) 式中的 $Q_0$ 代入(7) 式得(6) 式，即存在某对称非负定矩阵 $\hat{Q} = Q + PB_0R^{-1}B_0^T P$ 满足

$$(A - B_0 R^{-1} B_0^T P)^T P + P(A - B_0 R^{-1} B_0^T P) + \hat{Q} = 0.$$

由于 $P > 0, \hat{Q} \geqslant 0$，所以，矩阵 $(A - B_0 R^{-1} B_0^T P)$ 是稳定的．由此可见，当 $K$ 由(5b) 式定义时，(5a) 式是系统(1) 的最优鲁棒稳定控制器．

**推论 1** 控制器(5) 是系统(1) 的最优鲁棒稳定控制器的充分条件是存在对称非负

定矩阵 $Q_0$ 以及方程(7)的解 $P$ 满足

$$Q_0 - T(P,\varepsilon) \geqslant 0, \tag{9a}$$

$$T(P,\ \varepsilon) = \varepsilon\rho P + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2 A_i^{\mathrm{T}} P A_i. \tag{9b}$$

式中 $\varepsilon$ 为任意正常数.

证 只要证明 $T(P,\varepsilon) \geqslant (\Delta A^{\mathrm{T}}P + P\Delta A)$ 即可,具体可参阅文献[5]和[6].在此略.

根据推论1的结论,如果定义优化命题:

$$\begin{cases}\min\limits_{Q_1,\varepsilon} J = \min\limits_{Q_1,n} \lambda_{\max}[Q_1^{-\mathrm{T}}T(P,\varepsilon)Q_1^{-1}] = \min\limits_{Q_1,\varepsilon} \lambda_{\max}[M], \\ \text{s.t.}\ \ A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 - PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P + Q_0 = 0, \quad Q_0 = Q_1^{\mathrm{T}}Q_1.\end{cases} \tag{10}$$

则推论1的充分条件变为 $J \leqslant 1$,式中假定矩阵 $R$ 给定.只要解(10)式就可以达到求解系统(1)的最优鲁棒控制器(5)的目的.若运用梯度法解优化问题(10),我们有如下结论:

**定理2** 在方程(10)中,目标函数 $J$ 关于变量 $Q_1$ 和 $\varepsilon$ 的一阶梯度函数分别为

1) $$\partial J/\partial Q_1 = Q_1V - 2Q_1^{-\mathrm{T}}(\varepsilon\rho P + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i)Q_1^{-1}v_mv_m^{\mathrm{T}}Q_1^{-\mathrm{T}}. \tag{11}$$

式中矩阵 $V$ 满足代数 Lyapunov 矩阵方程

$$\begin{cases}A_cV + VA_c^{\mathrm{T}} + 2\varepsilon\rho Q_1^{-1}v_mv_m^{\mathrm{T}}Q_1^{-\mathrm{T}} + 2\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_iQ_1^{-1}v_mv_m^{\mathrm{T}}Q_1^{-\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}} = 0, \\ A_c = (A_0 - B_0K),\end{cases} \tag{12}$$

且 $v_m$ 是矩阵 $[Q_1^{-\mathrm{T}}T(P,\varepsilon)Q_1^{-1}]$ 属于其最大特征值 $\lambda_{\max}[Q_1^{-\mathrm{T}}T(P,\varepsilon)Q_1^{-1}]$ 的右特征矢量;

2) $$\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varepsilon = v_m^{\mathrm{T}}Q_1^{-\mathrm{T}}[\rho P - \varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i]Q_1^{-1}v_m, \quad \varepsilon > 0, \tag{13a}$$

$$\mathrm{d}^2J/\mathrm{d}\varepsilon^2 = 2\varepsilon^{-3}v_m^{\mathrm{T}}Q_1^{-\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_iQ_1^{-1}v_m, \quad \varepsilon > 0. \tag{13b}$$

证 根据 $J$ 以及特征值和特征矢量的定义,$J$ 可以表示为

$$J = v_m^{\mathrm{T}}[Q_1^{-\mathrm{T}}T(P,\ \varepsilon)Q_1^{-1}]v_m.$$

当矩阵 $Q_1$ 具有增量 $\Delta Q_1$ 时,$J$ 的增量 $\Delta J$ 可以表示为

$$\Delta J = (v_m + \Delta v_m)^{\mathrm{T}}(Q_1 + \Delta Q_1)^{-\mathrm{T}}T(P + \Delta P,\ \varepsilon)(Q_1 + \Delta Q_1)^{-1}(v_m + \Delta v_m) - J. \tag{14}$$

当 $\Delta Q_1$ 充分小时,我们有

$$(v + \Delta v_m)^{\mathrm{T}}(M + \Delta M)(v + \Delta v_m) \cong v_m^{\mathrm{T}}(M + \Delta M)v_m, \tag{15a}$$

$$(Q_1 + \Delta Q_1)^{-1} \cong Q_1^{-1} - Q_1^{-1}\Delta Q_1Q_1^{-1}. \tag{15b}$$

将(15)式代入(14)式,$\Delta J$ 关于矩阵 $\Delta Q_1$ 和 $\Delta P$ 的一阶线性近似为

$$\begin{aligned}\Delta J \cong\ & v_m^{\mathrm{T}}[Q_1^{-\mathrm{T}}(\varepsilon\rho\Delta P + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}\Delta PA_i)Q_1^{-1} - Q_1^{-\mathrm{T}}(\varepsilon\rho P + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i)Q_1^{-1}\Delta Q_1Q_1^{-1} \\ & - Q_1^{-\mathrm{T}}\Delta Q_1^{\mathrm{T}}Q_1^{-\mathrm{T}}(\varepsilon\rho P + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i)Q_1^{-1}]v_m \\ =\ & \mathrm{tr}[F_1\Delta P - F_2\Delta Q_1].\end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$F_1 = \varepsilon\rho Q_1^{-1}v_m v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2 A_i Q_1^{-1} v_m v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-T} - A^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

$$F_2 = 2Q_1^{-1}v_m\, v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}}(\varepsilon\rho P + \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2 A_i^{\mathrm{T}} P A_i)Q_1^{-1}. \tag{18}$$

另一方面,根据文献[7],方程(7)的增量方程以及它的解可以分别表示为

$$A_c^{\mathrm{T}}\Delta P + \Delta P A_c + \Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1^{\mathrm{T}}\Delta Q_1 = 0, \tag{19}$$

$$\Delta P = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}(A_c^{\mathrm{T}})^{j-1}(\Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1^{\mathrm{T}}\Delta Q_1)A_c^{k-1}, \quad \gamma_{jk} = \gamma_{kj}. \tag{20}$$

式中 $\gamma_{jk}$ 为常数,它只与 $A_c$ 和矩阵对$(A_c, Q_1^{\mathrm{T}})$的可控性有关. 将(20)式代入(16)式得

$$\begin{aligned}\Delta J &\cong \mathrm{tr}\{\sum_j\sum_k \gamma_{jk}F_1(A_c^{\mathrm{T}})^j(\Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1^{\mathrm{T}}\Delta Q_1)A_c^k - F_2\Delta Q_1\}\\ &= \mathrm{tr}\{[2\sum_j\sum_k \gamma_{jk}A_c^k F_1(A_c^{\mathrm{T}})^j Q_1^{\mathrm{T}} - F_2]\Delta Q_1\}\\ &= \mathrm{tr}[(VQ_1 - F_2)\Delta Q_1]\end{aligned} \tag{16'}$$

由此可以证明(11)式,其中矩阵 $V$ 满足(12)式.

仿照上面的证明过程可以证明方程(13).

## 4 最小反馈增益控制器

由上一节的分析可知,若定义矩阵

$$\tilde{Q} = Q_0 - T(P, \varepsilon), \tag{21}$$

则 $\tilde{Q} \geqslant 0$ 为系统存在解充分条件. 因为 $\tilde{Q} \neq 0$,意味着 $\tilde{Q}$ 的某种范数有可能很大,从而可能导致很大的反馈增益. 这个部分将研究 $\tilde{Q} = 0$ 时系统的鲁棒控制器的设计方法.

**定义 2** 对于两个对称非负定的矩阵 $\tilde{Q}_1$ 和 $\tilde{Q}_2$,若 $\tilde{Q}_1 \geqslant \tilde{Q}_2$,则称反馈系数矩阵 $K_1(= R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P_1)$ 大于或等于 $K_2(= R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P_2)$,其中矩阵 $P_i$ 是方程

$$A_0^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_0 - P_iB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P_i + \tilde{Q}_i = 0, \quad i = 1, 2$$

的唯一对称正定解.

根据定义2,由于 $\tilde{Q}_1 \geqslant \tilde{Q}_2$ 时有 $P_1 \geqslant P_2$,所以,在表征系统的不确定性界 $T(P,\varepsilon)$ 确定的情况下,若能求得 $\tilde{Q} = 0$ 时的解 $K = K^* = R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P^*$,则它是系统的最小解.

**定义 3** 如果方程

$$A_0^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{P}A_0 - \tilde{P}B_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}\tilde{P} + T(\tilde{P}, \varepsilon) = 0$$

具有唯一对称正定解 $\tilde{P}$,则称

$$u = -K^* x = -R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}\tilde{P}x$$

为系统(1)具有最小增益的最优鲁棒控制器.

我们之所以这样定义具有最小增益的最优鲁棒控制器是因为 $K^*$ 将只与 $T(\tilde{P},\varepsilon)$ 有关. 为了分析方便起见,将方程(21)中的 $Q_0$ 代入(7)式得

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 - PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P + \tilde{Q} + T(P, \varepsilon) = 0. \tag{22}$$

并有如下定理:

**定理 3** 假定矩阵方程(22)具有唯一对称正定解 $\tilde{P}$,设 $P_k(k = 0,1,\cdots)$ 是代数 Lyapunov 矩阵方程

$$\widetilde{A}_k^{\mathrm{T}} P_k + P_k \widetilde{A}_k \triangle P_{k-1} B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{k-1} + Q_k = 0 \tag{23}$$

的唯一对称正定解,式中

$$\widetilde{A}_k = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{k-1}, \quad Q_k = \widetilde{Q} + T(P_{k-1}, \varepsilon), \quad k = 0,1, \cdots. \tag{24}$$

则使得

i ) $P_0 \geqslant P_1 \geqslant \cdots \geqslant P_k \geqslant \cdots > 0, \quad k = 0,1, \cdots,$ 以及

ii) $\widetilde{P} = \lim\limits_{k \to \infty} P_k$

的充分条件是(至少)存在一个对称正定矩阵 $P_{-1}$ 使得

1) $\widetilde{A}_0 = (A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1})$ 是稳定的,并且

2) $T(P_0, \varepsilon) \leqslant T(P_{-1}, \varepsilon) + (P_0 - P_{-1}) B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} (P_0 - P_{-1})$.

证 该定理的证明可以仿照文献[8]进行.在此略.

由于 $T(P, \varepsilon)$ 是矩阵 $P$ 的线性函数,条件 2) 可以改为 $P_0 \leqslant P_{-1}$,这样,为了确定系统(1)的最优鲁棒控制器,关键问题是如何确定 $P_{-1}$ 使得条件 1) 和 $P_0 \leqslant P_{-1}$ 成立的问题.

**定理 4** 如果存在对称正定矩阵对 $Q_0$ 和 $R$ 使得(7)的解 $P$ 满足

$$Q_0 - T(P, \varepsilon) \geqslant 0, \tag{25}$$

则满足条件 1) 和 2) 的 $P_{-1}$ 可以由方程

$$P_{-1} = P + \tau I \tag{26}$$

确定,式中 $\tau \geqslant 0$ 的选取使得

$$\widetilde{Q} = Q_0 - T(P, \varepsilon) - \tau^2 B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} - \tau T(I, \varepsilon) \geqslant 0. \tag{27}$$

证 如果(25)式成立,则有 $\tau \geqslant 0$ 使得(27)式成立.若(26)式成立,则(27)式可以表示为

$$\widetilde{Q} = Q_0 - T(P_{-1}, \varepsilon) - (P - P_{-1}) B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} (P - P_{-1}). \tag{28}$$

将(28)中的 $Q_0$ 代入(7),并整理得

$$A_c^{\mathrm{T}} P + P A_c + P_{-1} B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1} + T(P_{-1}, \varepsilon) + \widetilde{Q} = 0. \tag{29}$$

式中 $A_c = (A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1})$.一旦 $P_{-1}$ 由(26)式定义,则有 $P_{-1} > 0$,并且可知 $P_{-1} B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1} + T(P_{-1}, \varepsilon) + \widetilde{Q} \geqslant 0$.因此,$P > 0$ 说明条件(1)为真.

另一方面,将(23)式减去(29)式,并令 $k = 0$,则有

$$(A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1})^{\mathrm{T}} (P - P_0) + (P - P_0)(A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1}) = 0. \tag{30}$$

由于$(A_0 - B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1})$是稳定的,方程(30)具有解$(P - P_0)$.因此有 $P_{-1} = P + \tau I = P_0 + \tau I \geqslant P_0$.这就说明条件(2)为真.因此,定理 4 为真.

定理 4 表明,要确定 $P_{-1}$,首先要确定满足(27)的 $Q_0$.这个问题已在上一部分解决.值得注意的是,由定理 4 的证明可知,对于满足(27)的任何 $\tau \geqslant 0$,总有 $P = P_0$.如果取 $\tau = 0$,则有 $P_{-1} = P$.如果以此作为初始条件,并将(23)中的 $Q_k$ 重新定义为

$$Q_k = \hat{Q} + T(P_{k-1}, \varepsilon), \quad \hat{Q} \leqslant \widetilde{Q}. \tag{31}$$

若将此时(23)式解记为 $\overline{P}_k$,则有 $\overline{P}_k \leqslant P_k$,根据这一推理,我们可以给出如下定理:

**定理 5** 如果存在对称正定矩阵 $Q_0$ 和 $R$ 使(7)的解 $P$ 满足(25),则具有最小增益的最

优鲁棒控制器反馈增益矩阵 $K^* = R^{-1}B_0^T\tilde{P}$ 可以由定理 4 通过令 $P_{-1}=P$, $\tilde{Q}=0$ 来求得.

## 5 设计举例

考虑如下具有二输入三阶线性多变量可控系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & r_1 & 1.0 \\ 0.0 & r_2-4.0 & 0.0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} u.$$

其中 $-1 \leqslant r_1 \leqslant 1$, $-1.5 \leqslant r_2 \leqslant 1$, $\rho = 2$. 在这个例题中 $T(P,\varepsilon)$ 可以表示为

$$T(P,\varepsilon) = 2\varepsilon P + \varepsilon^{-1}(A_1^TPA_1 + 2.25A_2^TPA_2).$$

式中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

任意选一组初始值

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0.9 & -0.4 \\ 0.2 & 1.0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad R = I, \quad \varepsilon = 1, \quad h = 0.015.$$

经过 26 次迭代求解得到 $J = 0.9439$, $\varepsilon = 0.4766$, 以及

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -80.1860 & -54.7682 & -27.3150 \\ 78.9766 & 45.8407 & 27.2206 \\ -36.7030 & -22.1438 & -10.5891 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2.5990 & 0.6516 & 1.2383 \\ 0.6516 & 1.9523 & -0.1999 \\ 1.2383 & -0.1999 & 3.7079 \end{bmatrix}.$$

再令 $P_{-1} = P$, $\tilde{Q} = 0$, 并代入(23)式, 经过 8 次迭代运算求得的最后结果为

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.0284 & 0.0767 & 0.0309 \\ 0.0767 & 0.9442 & -0.1510 \\ 0.031 & -0.1510 & 0.5643 \end{bmatrix}, \quad K^* = \begin{bmatrix} 0.2838 & 0.7666 & 0.3094 \\ 0.7666 & 9.6424 & -1.5099 \end{bmatrix}.$$

很明显, 增益矩阵 $K^*$ 远小于增益矩阵 $K = R^{-1}B_0^TP$.

## 6 结束语

本文算法从结构上可以分两个部分进行: 首先确定出能够满足系统稳定的最优鲁棒控制器, 然后再在此结果的基础上求得系统的具有最小增益的最优鲁棒控制器. 如果方程(23)的最小稳定解为零, 则表明不确定系统的开环系统特性本身就是稳定的. 在这种情况下, 为了保证闭环控制系统具有一定的稳定裕度, 可以引入常量 $\alpha \geqslant 0$, 并定义 $A_0 =: A_0 + \alpha I$, 再按本文的方法设计鲁棒控制器即可.

## 参 考 文 献

[1] Chang, S. S. L. and Peng, T. K. C.. Adaptive Guaranteed Cost Control for Systems with Uncertain Parameters. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, AC-17:474—483

[2] Peterson, I. R.. A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a Class of Uncertain Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30:753—759

[3] Peterson, I. R. and Hollot, C. V.. A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems. Automatica, 1986, 22:397—411

[4] Schmitendorf, W. E.. Designing Stabilizing Controllers for Uncertain Systems Using the Riccati Equation Approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33:376—379

[5] Kosmidou, O. I. and Bertrand, P.. Robust Controller Design for Systems Parameter Variation. Int. J. Control, 1987, 45:927—938

[6] 王耀青. 浙江大学博士后研究工作报告. 第四章, 杭州, 1991

[7] DeZouza, E. and Bhattacharyya, S. P.. Controllability, Observability and Solution of $AX-XB=C$. Linear Algebra Appl., 1981, 39(2):167—188

[8] Kleinma, D. L.. On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, AC-13:114—116

# Design of Optimal Robust Controller with Minimal Gain

WANG Yaoqing

(Department of Power Enginnering, Huazhong University of Science Technology. Wuhan, 430074. PRC)

**Abstract**: The problem to be solved in the design of robust controller includes two fileds: one is that the controlled systems should be stable, and the other is that the designed controller gain should be reduced to a minimal degree as possible. In this paper, an algorithmic procedure is proposed via transforming the problem of designing an optimal robust controller for systems with uncertain parameters to an equivalent optimization problem, and based on the result, a new method is proposed for determining a stabilizable controller with minimal gain.

**Key workds**: uncertain systems; LQ optimal control; optimal robust controller; minimal controller gain

## 本文作者简介

**王耀青** 1961年生. 1983年毕业于天津纺织工学院自动化系. 1986年在中国科学院自动化研究所取得硕士学位; 1989年在浙江大学获得工学博士学位. 现任华中理工大学副教授. 主要研究兴趣为线性多变量控制系统设计中自由参数特性的研究, 鲁棒控制器设计方法的研究以及LQ最优控制问题的研究等.