

矩阵变换法求解广义系统与广义系统的分层特征

王迎军 潘德惠

(东北大学工商管理学院·沈阳, 110006)

摘要: 本文利用矩阵的初等变换技巧, 对广义系统 $EX = AX + Bu$ 的解给出了一种新的计算方法. 本方法只需对 E, A 进行初等行变换与列变换, 即可求出原系统的解. 同时指出该方法优于矩阵束方法和 Drazin 逆方法, 并给出求解实例. 在此基础上透视了广义系统的“树型”分层特征, 这是广义系统的快子系统所具有的特点. 这一特点恰恰反映了管理特征.

关键词: 广义系统; 初等变换; 解; 分层特征

1 引言

对如下正则的广义系统

$$EX = AX + Bu. \quad (1.1)$$

其中, E, A 是 n 阶常方阵, B 是 $n \times m$ 阶常矩阵, u 是 m 维向量函数, $\text{rank } E = r < n$, (E, A) 正则, 即对于任意 s 满足 $\det(sE + A) \neq 0$. 其背景相继提出很多^[1,2,3]. 其传统解法是用矩阵束理论^[4] 或 Drazin 逆^[2] 来求. 这两种方法都要求特征向量、构造相似变换矩阵. 当 E, A 维数很大时, 求特征向量的计算量很大. 1990 年, [5] 给出了一种用正交函数求解的方法, 但仍不很实用.

本文给出的方法不求特征向量来构造相似变换矩阵, 只做矩阵初等变换即可求解广义系统. 尤其当系统维数很大时本方法同样有效.

2 广义系统的求解方法

2.1 矩阵变换法求解广义系统的一个定理

对于广义系统 (1.1), 为了给出求解方法, 先介绍如下结论^[7].

定理 2.1 如果 (E, A) 正则, 那么存在可逆矩阵 $\tilde{P}, \tilde{Q}$, 使得

$$\tilde{P}E\tilde{Q} = \begin{bmatrix} I_{r-m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\tilde{P}A\tilde{Q} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_1} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

式中“*”表示可不为零的矩阵(下同).

于是,令

$$X = \tilde{Q}Y \triangleq \tilde{Q}(y_1^T, y_2^T, y_3^T, y_4^T)^T, \quad (2.3)$$

$$\tilde{P}B \triangleq (\tilde{B}_1^T, \tilde{B}_2^T, \tilde{B}_3^T, \tilde{B}_4^T)^T. \quad (2.4)$$

(式中上标“T”表示转置)则(1.1)变成

$$\begin{bmatrix} I_{r-m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{Y} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} \cdot Y + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ \tilde{B}_4 \end{bmatrix} \cdot u. \quad (2.5)$$

2.2 广义系统的一个新的标准型

由定理 2.1 得,存在可逆阵 $\tilde{P}, \tilde{Q}$ 使得

$$\tilde{P}(sE + A)\tilde{Q} = \begin{bmatrix} sI + A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & sI & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

对(2.6)式等号右端左上角两行两列组成的子块应用定理 2.1(设可逆阵为 P_a, Q_a)得(2.7),对(2.7)式,用第一列和第二列子块中的 sI 消去第三列子块中的 sA_2 和 sA_3 ,并把第三列子块中新出现的不含 s 的矩阵用第三行子块消去,最后把第三列、第三行分别乘以 A_1^{-1} 和 A_1 . 上述行列变换所对应的矩阵为 P_β, Q_β .

$$\begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{P}(sE + A)\tilde{Q} \begin{bmatrix} Q_a & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI + A_{a11} & A_{a12} & 0 & 0 & sA_3 & 0 \\ A_{a21} & A_{a22} & sI & 0 & sA_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & sA_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$P_\beta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & A_{a11}A_3 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & A_{a21}A_3 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$Q_\beta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & -A_3 A_1^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -A_2 A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

用(2.8), (2.9)分别前乘, 后乘(2.7), 则

$$P_\beta \begin{bmatrix} P_\alpha & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{P}(sE + A) \tilde{Q} \begin{bmatrix} Q_\alpha & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q_\beta = \begin{bmatrix} sI + A_{\alpha 11} & A_{\alpha 22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{\alpha 21} & A_{\alpha 22} & sI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & sI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

如此进行下去, 可得下述定理.

定理 2.2 广义系统(1.1)具有如下标准型, 即存在可逆方阵 P^*, Q^* , 使得

$$P^* E Q^* = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N^* \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$P^* A Q^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

这里, N^* 是上次对角线上分块阵为零阵、单位阵间隔出现, 其它位置为零的幂零阵, A_1^* , N^* 的维数分别为 n_1, n_2 , N^* 写成

$$N^* = \begin{bmatrix} 0 & I & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & I & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & I \\ & & 0 & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

2.3 广义系统的解

令

$$X = Q^* \cdot Y^* \\ \triangleq Q^* \cdot (v_1^T, v_2^T, v_3^T, v_4^T, w_3^T, w_4^T, \dots, z_3^T, z_4^T, y_3^T, y_4^T)^T. \quad (2.14)$$

式中 $v_1, v_2, v_3, v_4, w_3, w_4, z_3, z_4, y_3, y_4$ 的维数分别为 $n_1, p, p, m_6 - p, m_6, m_5, m_2 - m_3, m_3, m_2, m_1$. 令

$$P^* B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \triangleq (B_1^T, B_{21}^T, B_{22}^T, \dots, B_{2k}^T)^T. \quad (2.15)$$

用 P^* 前乘(1.1), 并把(2.14)代入得

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N^* \end{bmatrix} \dot{Y}^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Y^* + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u. \quad (2.16)$$

由(2.13), (2.14)得

$$\dot{v}_1(t) = A_1^* v_1 + B_1 u(t), \quad (2.17)$$

$$N^* Y_2 = Y_2 + B_2 u(t). \quad (2.18)$$

这里

$$Y_2 \triangleq (v_2^T, v_3^T, v_4^T, \dots, z_3^T, z_4^T, y_3^T, y_4^T)^T. \quad (2.18a)$$

(2.18)式由最后一行到第一行分开写为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2k-1} \\ B_{2k} \end{bmatrix} u(t), \quad (2.19a)$$

$$\dot{y}_3 = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2k-3} \\ B_{2k-2} \end{bmatrix} u(t), \quad (2.19b)$$

...

$$\dot{w}_3 = \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{22} \\ B_{23} \end{bmatrix} u(t). \quad (2.19c)$$

$$\dot{v}_3 = v_2 + B_{21} u(t). \quad (2.19d)$$

显然, (2.17)的解为

$$v_1(t) = e^{A_1^* t} v_{10} + \int_0^t e^{A_1^* (t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

(2.19)的解为

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{2k-1} \\ B_{2k} \end{bmatrix} u(t) \triangleq \begin{bmatrix} B_{\alpha 3} & 0 & \dots & 0 \\ B_{\alpha 4} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} u^*, \quad (2.21)$$

式中(下同)

$$u^* \triangleq (u^T, [u^{(1)}]^T, \dots, [u^{(\gamma-2)}]^T, [u^{(\gamma-1)}]^T)^T, \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{2k-3} \\ B_{2k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} B_{\alpha 31} & B_{\alpha 32} & 0 & \dots & 0 \\ B_{\alpha 41} & B_{\alpha 42} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} u^*, \quad (2.23)$$

...

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} B_{\beta 31} & \dots & B_{\beta 3(\gamma-1)} & 0 \\ B_{\beta 41} & \dots & B_{\beta 4(\gamma-1)} & 0 \end{bmatrix} u^*, \quad (2.24)$$

$$v_2 \triangleq [B_{\beta 21} \quad \dots \quad B_{\beta 2(\gamma-1)} \quad B_{\beta 2\gamma}] u^*. \quad (2.25)$$

上述求解过程是通过把求得的解逐个代入下一个方程得到的. 把(2.18)的解写成矩

阵形式为

$$Y_2(t) = \begin{bmatrix} B_{\beta 21} & \cdots & B_{\beta 2(\gamma-1)} & B_{\beta 2\gamma} \\ B_{\beta 31} & \cdots & B_{\beta 3(\gamma-1)} & 0 \\ B_{\beta 41} & \cdots & B_{\beta 4(\gamma-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{\alpha 31} & \cdots & 0 & 0 \\ B_{\alpha 41} & \cdots & 0 & 0 \\ B_3 & \cdots & 0 & 0 \\ B_4 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u^*(t). \quad (2.26)$$

综上所述可得如下定理.

定理 2.3 广义系统(1.1)的解在满足一致初始条件下^[2],可表达成如下形式

$$X(t) = Q^* \begin{bmatrix} v_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

$v_1(t), Y_2(t)$ 分别由(2.26), (2.27)给出.

初值满足

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ Y_{20} \end{bmatrix} = (Q^*)^{-1} X(0). \quad (2.28)$$

2.4 矩阵变换法的优点

广义系统(1.1)传统的解法实质是构造相似变换矩阵,而用“矩阵变换法”求解广义系统,是在对 E, A 做相同的行、列变换,即相同的等价变换下得到的,而求等价变换矩阵的计算量要比求相似变换矩阵的计算量小得多.因为等价变换不必求解特征向量,只需用文献[8]介绍的方法即可求出等价变换矩阵.本方法对维数较大的广义系统同样有效.因此可以认为,用“矩阵变换法”求解广义系统会在实际中得到广泛的应用.

2.5 一个求解实例

考虑如下的广义系统

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t^2 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$X(1) = (9 \quad -3 \quad -13 \quad 10)^T. \quad (2.30)$$

利用定理 2.1 给出的方法,取

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

于是(2.29)可化成如下等价系统

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t^2 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

由(2.28)求出初始条件,解(2.32)得

$$y_1 = \frac{15}{4}e^{2t-2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}, \quad (2.33a)$$

$$y_2 = -2t - 1, \quad (2.33b)$$

$$y_3 = -t, \quad (2.33c)$$

$$y_4 = 12t - 2t^2. \quad (2.33d)$$

代入解表达式(2.27)得

$$x_1 = \frac{15}{4}e^{2t-2} + \frac{7}{4}(2t+1), \quad (2.34a)$$

$$x_2 = -2t - 1, \quad (2.34b)$$

$$x_3 = 2t^2 - 15t, \quad (2.34c)$$

$$x_4 = 12t - 2t^2. \quad (2.34d)$$

不难验证,(2.34)满足一致初始条件.

3 广义系统的“树型”分层特征

对广义系统(1.1)的解中 Y_2 的分量(见(2.18a)式)给出如下关于层的定义.

依次称 $\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ 为第一,二,三, ..., $\gamma-1, \gamma$ 层, 即

$$Y_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} v_3^T & v_4^T \end{bmatrix}}_{\text{第 } \gamma \text{ 层}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_3^T & v_4^T \end{bmatrix}}_{\text{第 } \gamma-1 \text{ 层}} \cdots \underbrace{\begin{bmatrix} z_3^T & z_4^T \end{bmatrix}}_{\text{第二层}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_3^T & y_4^T \end{bmatrix}}_{\text{第一层}}^T. \quad (3.1)$$

在求解 Y_2 的过程中,由于每迭代一次,控制项对时间 t 求一次导数,同时层数增加一层.因此,第 γ 层包含了控制项从零阶直到 $\gamma-1$ 阶的导数,于是此处的 γ 与(2.26)中的 γ 是同一值.

(2.26)式与广义系统的标准分解^[1]比较得

定理 3.1 广义系统的层数等于快子系统的幂零指数.层数 $\gamma = \text{ind} N$.

一般地,广义系统具有如下的“树型”分层结构.

在图1中,下标为3的是“树”的“主干”,下标为4的是“分枝”.下面试着说明层次之间的联系.

第一层 $(y_3^T, y_4^T)^T$, 具有纯量特征,即 $(y_3^T, y_4^T)^T$ 为控制项 u 的线性组合,并且只有 y_3 影响到第二层的变量.

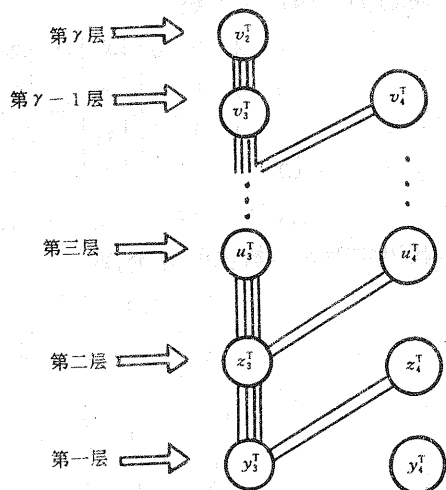


图1 “树型”分层特征图

第二层 $(z_3^T, z_4^T)^T$, 具有纯量与增量特征, 即 $(z_3^T, z_4^T)^T$ 为控制项及其一阶导数的线性组合. z_3, z_4 在受第一层变量 y_3 影响的同时, 只有 z_3 影响到第三层各变量, 而 z_4 不影响第三层变量.

.....

第 γ 层 v_2 包含控制向量及其高阶导数 (直到 $\gamma - 1$ 阶), 说明, 第 γ 层直接或间接地受前 $\gamma - 1$ 层的影响.

由此可见, 各层之间通过“主干”(下标为 3 的向量)联系着, “主干”起着承上启下的作用. 当“主干”的影响达到“分枝”(下标为 4 的向量)端上时, 不对下一层起作用, 当沿着“主干”发展时, 对下一层起着重要作用.

层次之间的这种作用分布正好和树的形状相似, 因此我们称之为“树型”分层特征. 其实, 这种特征与社会经济管理体制中的分级管理的特点相似, 也与各级政府执行政府职能的特征相似. 从这种意义上讲, 广义系统模型可以在社会经济与管理中得到广泛的应用.

4 结 论

本文介绍的“矩阵变换法”是求解广义系统的一种新方法. 由于只需对 E, A 进行初等行、列变换, 因此求解过程的计算量远小于矩阵束方法或 Drazin 逆方法. 在此基础上分析了广义系统的“树型”分层特征, 这是广义系统的快子系统所具有的特点. 而快子系统的特点恰恰反映了管理特征. 最后指出, “树型”分层特征与分级管理的特点和政府执行职能的特征相似, 从这种意义上讲, 可以用广义系统模型研究社会、经济系统的发展与管理中的有关问题.

参 考 文 献

- [1] 王朝珠, 戴立意. 广义动态系统. 控制理论与应用, 1986, 3(1): 2—12
- [2] 张金水. 广义系统经济控制论. 北京: 清华大学出版社, 1990
- [3] Kono, H. and Nakamura, Z.. The Balanced Lot Size for a Single-Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem. Journal of the Operations Research Society of Japan, 1990, 33(2): 119—138
- [4] Gantmacher, F. R.. The Theory of Matrices. New York, Chelsea, 1974
- [5] Campbell, S. L. and Yeomans, K. D. Solving Singular System Using Orthogonal Function. IEE Proceedings-D, 1990, 137(4): 222—224
- [6] Campbell, S. L.. Singular Systems of Differential Equations. II. Pitman, 1982
- [7] 王迎军, 潘德惠. 计算正则矩阵束标准型的一种实用方法. 东北大学学报, 1994, 15(4): 418—422
- [8] 北京大学数学力学系. 高等代数. 北京: 人民教育出版社, 1978
- [9] Lewis, F. L.. A Survey of Linear Singular Systems Circuits. Systems and Signal Process, 1986, 5(1): 3—36

Matrix Transform Method for Solving Singular Systems and Its Layer-Built Character

WANG Yingjun and PAN Dehui

(Faculty of Business Administration, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: By using primary transform of matrices we have proposed a new method for solving the singular systems $E\dot{X} = AX + Bu$. We use only primary row and column transform to calculate the solution. And we point out that "matrix transform method" is prior to the traditional one which uses pencils of matrices or Drazin inverse. An example is given in the next part. Based on the above discussions, it's clear that singular systems have a layer-built character of "tree systems". This is the property of fast sub-systems which characterise management systems.

Key words: singular systems; primary transform; solution; layer-built character

本文作者简介

王迎军 1965年生. 1987年, 1992年在东北大学分别获得理学学士、工学硕士学位. 1995年在职攻读博士学位. 目前感兴趣的研究领域: 线性广义系统, 智能控制, 广义分布参数系统的理论及其应用.

潘德惠 1928年生. 东北大学理学院东北大学三部 1949年毕业于. 东北大学工商管理学院教授. 自动控制理论及应用专业博士生导师. 中国数学学会理事. 曾多年从事应用数学的研究. 后转入自动控制理论及应用方面的研究工作. 现在的研究领域是分布参数系统的模型辨识与最优控制.