第12卷第4期
1995年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 4
Aug., 1995

# 基于互质分解的同时镇定控制器参数化

曹永岩　孙优贤

(浙江大学工业控制技术研究所·杭州,310027)

**摘要**：本文基于稳定互质分解介绍了所有分散镇定控制器的参数化方法,给出了一种同时镇定控制器的参数化方法,并得到了同时镇定问题的解的参数化结果,即由一广义对象的控制器的分散和同时结构约束导出了参数需满足的一系列二次方程的约束条件.

**关键词**：稳定互质分解；同时镇定；分散控制

## 1 引　言

同时镇定是提高系统可靠性的一种有效办法,当被控对象由于工作点的改变,传感器或执行器出现故障时,使得被控对象传递函数发生变化,此时如何设计一控制器使得被控对象能保持稳定具有很大的实际意义. 自 1982 年 Saeks 和 Vidyasagar 等人[1,2]首先提出同时镇定问题以来,作为鲁棒控制研究的一个重要分支,对于同时镇定问题的研究引起了众多学者的注意,并已取得了许多成果,见文献[3～9]及其参考文献. 所有已取得的成果大部分都是在探讨使用一个控制器同时镇定 $k(\geqslant 3)$ 个对象的充分和必要条件,然而,到现在仅得到一些同时镇定控制器存在的充分或者必要条件[4,5,7,9],这个问题仍没有得到较好的解决[9],即使对于简单的两对象的同时镇定问题,由于均恒交错性(PIP)条件的约束,也不一定总能找到一个 LTI 控制器同时镇定这两个对象[1,9]. 本文使用分散稳定互质分解的方法,对一系列结构约束条件进行推导,得到了同时镇定控制器的参数化结果,并给出了实例.

## 2 稳定互质分解及分散镇定控制器

考虑线性时不变(LTI)控制系统,设对象传递函数矩阵 $P \in G^{m\times n}$,控制器 $C \in G^{n\times m}$, $G^{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 维正则有理分式矩阵,且 $P,C$ 的分块结构如下:

$$P = [P_{ij}], \quad P_{ij} \in G^{(m_i-m_{i-1})\times(n_j-n_{j-1})}, \quad C = [C_{ij}],$$
$$C_{ij} \in G^{(n_i-n_{i-1})\times(m_j-m_{j-1})}, \quad i,j = 1,2,\cdots,s. \tag{2.1}$$

其中　$n_0 = 0, \quad n_s = n, \quad m_0 = 0, \quad m_s = m.$

**引理 2.1**[3]　对于正则有理传函矩阵,一定存在 8 个 $RH_\infty$ 矩阵使得

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\overline{N}_P & \overline{D}_P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_P & -\overline{X} \\ N_P & \overline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

$P(s) = \overline{D}_P^{-1}\overline{N}_P = N_P D_P^{-1}$ 分别称为 $P$ 的左右互质分解,$K(s) = Y^{-1}X = \overline{X}\,\overline{Y}^{-1}$ 为镇定 $P$ 的控制器,并被称为中心控制器(central controller). 对象 $P$ 的所有镇定控制器的集合为

本文于1994年6月8日收到,1994年10月26日收到修改稿.

$$S(P) = \{C = (Y - Q\overline{N}_P)^{-1}(X + Q\overline{D}_P) \mid Q \in \mathrm{RH}_\infty,\ \det(Y - Q\overline{N}_P) \neq 0\} \tag{2.3}$$

$$= \{C = (\overline{X} + D_P Q)(\overline{Y} - N_P Q)^{-1} \mid Q \in \mathrm{RH}_\infty,\ \det(\overline{Y} - N_P Q) \neq 0\}. \tag{2.4}$$

我们不难发现，如果 $C_1, C_2$ 是 $P$ 的两镇定控制器，那么 $C_1 = C_2$，当且仅当 $Q_1 = Q_2$. 分散控制就是要求仅利用局部信息来对被控对象进行控制，因此控制器的非对角块元素为 0，被控对象 $P$ 的分散镇定控制器可以表示为以下带结构约束的集合形式：

$$S_d(P) = \{C \mid C \in S(P), C_{ij} = 0, \forall\ i \neq j\}. \tag{2.5}$$

不难发现以下等式成立：

$$\{C_{ij} = 0, \forall\ i \neq j\} \Leftrightarrow L_{n_j} C = C L_{m_j}, \quad j = 1, \cdots, s - 1, \tag{2.6}$$

$$L_{n_j} = \begin{bmatrix} I_{n_j} & 0 \\ 0 & -I_{n-n_j} \end{bmatrix} = L_{n_j}^{-1}, \quad L_{m_j} = \begin{bmatrix} I_{m_j} & 0 \\ 0 & -I_{m-m_j} \end{bmatrix} = L_{mj}^{-1}, \quad j = 1, \cdots, s - 1. \tag{2.7}$$

**定理 2.1** 对象 $P = [P_{ij}](P_{ij} \in G^{(m_i - m_{i-1}) \times (n_j - n_{j-1})})$ 的分散镇定控制器可表示为以下集合形式：

$$S_i(P) = \{C = (Y - Q\overline{N}_P)^{-1}(X + Q\overline{D}_P) \mid Q \in \mathrm{RH}_\infty,\ \det(Y - Q\overline{N}_P) \neq 0,$$
$$S_{2j} + QS_{4j} - S_{1j}Q - QS_{3j}Q = 0, \quad j = 1, \cdots, s - 1\}. \tag{2.8}$$

其中 $$S_j = \begin{bmatrix} S_{1j} & S_{2j} \\ S_{3j} & S_{4j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YL_{n_j}D_P + XL_{m_j}N_P & -YL_{n_j}\overline{X} + XL_{m_j}\overline{Y} \\ -\overline{N}_P L_{n_j} D_P + \overline{D}_P L_{m_j} N_P & \overline{N}_P L_{n_j}\overline{X} + \overline{D}_P L_{m_j}\overline{Y} \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

证 由引理 2.1 对 $j = 1, 2, \cdots, s - 1$ 均有：

$$L_{n_j} C = C L_{m_j} \Leftrightarrow$$
$$L_{n_j}(\overline{X} + D_P Q)(\overline{Y} - N_P Q)^{-1} = (Y - Q\overline{N}_P)^{-1}(X + Q\overline{D}_P) L_{m_j} \Leftrightarrow$$
$$(Y - Q\overline{N}_P) L_{n_j}(\overline{X} + D_P Q) = (X + Q\overline{D}_P) L_{m_j}(\overline{Y} - N_P Q) \Leftrightarrow$$
$$(-YL_{n_j}\overline{X} + XL_{m_j}\overline{Y}) + Q(\overline{N}_P L_{n_j}\overline{X} + \overline{D}_P L_{m_j}\overline{Y})$$
$$- (YL_{n_j}D_P + XL_{m_j}N_P)Q - Q(-\overline{N}_P L_{n_j} D_P + \overline{D}_P L_{m_j} N_P)Q = 0 \Leftrightarrow$$
$$S_{2j} + QS_{4j} - S_{1j}Q - QS_{3j}Q = 0.$$

证毕.

本定理将分散控制器的结构约束化为镇定控制器参数化表示时对参数的取值范围的约束.

## 3 同时镇定控制器参数化

设有 $s$ 个对象 $P_i(P_i \in G^{m \times n}), i = 1, 2, \cdots, s$，令 $P = \text{block-diag}(P_i)$（表示对角块为 $P_1, P_2, \cdots P_s$ 的块对角矩阵）. 设 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 的同时镇定控制器为 $C_s$，那么 $P$ 的镇定控制器可以表示成如下带结构约束的集合形式：

$$S_S(P) = \{C \in S(P) \mid C_{ii} = C_S,\ i = 1, 2, \cdots, s, C_{ij} = 0, \forall\ i \neq j\}. \tag{3.1}$$

这样我们将 $s$ 个对象的同时镇定控制器的求取化为求由这 $s$ 个对象组成的广义的块对角对象的分散镇定控制器. 由式(2.6)知，分散约束 $C_{ij} = 0(\forall\ i \neq j)$ 可以表示为

$$L_{n_j} C = C L_{m_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, s - 1. \tag{3.2}$$

同样，约束 $C_{ii} = C_S, i = 1, 2, \cdots, s$，也可表示为

$$M_{n_j} C = C M_{m_j}, \quad j = 2, \cdots, s. \tag{3.3}$$

其中

$$M_{n_j} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ j \\ \\ \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & \quad & \quad & j & j+1 & \quad & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix}_{n\times n} \end{array} = M_{n_j}^{-1},$$

$M_{m_j}$ 形式相似. 我们有如下结论:

**定理 3.1**　$s$ 个被控对象 $P_1, P_2, \cdots, P_S$ 的同时镇定控制器 $C_S$ 为

$$C_S = (Y - Q\overline{N}_P)^{-1}(X + Q\overline{D}_P), Q \in \mathrm{RH}_\infty, \det(Y - Q\overline{N}_P) \neq 0,$$

$$S_{2j} + QS_{4j} - S_{1j}Q - QS_{3j}Q = 0, \quad j = 1, \cdots, s-1, \tag{3.4}$$

$$T_{2j} + QT_{4j} - T_{1j}Q - QT_{3j}Q = 0, \quad j = 2, 3, \cdots, s. \tag{3.5}$$

其中

$$T_j = \begin{bmatrix} T_{1j} & T_{2j} \\ T_{3j} & T_{4j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YM_{n_j}D_P + XM_{m_j}N_P & -YM_{n_j}\overline{X} + XM_{m_j}\overline{Y} \\ -\overline{N}_P M_{n_j} D_P + \overline{D}_P M_{m_j} N_P & \overline{N}_P M_{n_j}\overline{X} + \overline{D}_P M_{m_j}\overline{Y} \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

显然,本定理的前半部分就是定理 2.1,式(3.5) 的证明与式(3.4) 证明类似. 本定理利用分散镇定控制器的结果得到了带参数约束的同时镇定控制器的参数化表示,结果还比较复杂,还需要进行比简. 为了简单起见,我们先对 2 个对象的同时镇定问题进行讨论.

设 $P_1 = N_1 D_1^{-1} = \overline{D}_1^{-1}\overline{N}_1, P_2 = N_2 D_2^{-1} = \overline{D}_2^{-1}\overline{N}_2$ 为 $P_1, P_2$ 的稳定互质分解,即对于 $i = 1, 2$ 有如下等式:

$$\begin{bmatrix} Y_i & X_i \\ -\overline{N}_i & \overline{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i & -\overline{X}_i \\ N_i & \overline{Y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

因此有

$$\begin{bmatrix} Y_1 & 0 & X_1 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & Y_2 \\ -\overline{N}_1 & 0 & \overline{D}_1 & 0 \\ 0 & -\overline{N}_2 & 0 & \overline{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 & -\overline{X}_1 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & -\overline{X}_2 \\ N_1 & 0 & \overline{Y}_1 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & \overline{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

显然,

$$N_P = \text{block-diag}(N_1, N_2), \quad D_P = \text{block-diag}(D_1, D_2),$$

$$\overline{N}_P = \text{block-diag}(\overline{N}_1, \overline{N}_2), \quad \overline{D}_P = \text{block-diag}(\overline{D}_1, \overline{D}_2)$$

是 $P = \text{block-diag}(P_1, P_2)$ 的互质分解因子,代入式(2.9),由式(3.7) 有:

$$S_{11} = \text{block-diag}(I_n, -I_n), \quad S_{21} = 0,$$

$$S_{31} = 0, \quad S_{41} = \text{block-diag}(I_m, -I_m). \tag{3.8}$$

因此式(2.8) 变为

$$S_{11}Q = QS_{41}. \tag{3.9}$$

令:　$Q = [Q_{ij}](i, j = 1, 2), \quad Q_{11} \in \mathrm{G}^{n_1 \times m_1}, \quad Q_{22} \in \mathrm{G}^{(n-n_1)\times(m-m_1)},$

由式(3.8),(3.9)不难发现 $Q$ 为块对角的,即 $Q_{12}=Q_{21}=0$. 类似地对式(3.4)进行推导可得以下结果:

$$T_{11}=\begin{bmatrix}0 & Y_1D_2+X_1N_2\\ Y_2D_1+X_2N_1 & 0\end{bmatrix},\quad T_{21}=\begin{bmatrix}0 & X_1\overline{Y}_2-Y_1\overline{X}_2\\ X_2\overline{Y}_1-Y_2\overline{X}_1 & 0\end{bmatrix},$$

$$T_{31}=\begin{bmatrix}0 & \overline{D}_1N_2-\overline{N}_1D_2\\ \overline{D}_2N_1-\overline{N}_2D_1 & 0\end{bmatrix},\quad T_{41}=\begin{bmatrix}0 & \overline{N}_1\overline{X}_2+\overline{D}_1\overline{Y}_2\\ \overline{N}_2\overline{X}_1+\overline{D}_2\overline{Y}_1 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

**定理 3.2**　两对象 $P_1,P_2\in G^{m\times n}$ 的同时镇定问题的解的集合为:

$$S_S(P_1,P_2)=\{C_S=(Y_1-Q_1\overline{N}_1)^{-1}(X_1+Q_1\overline{D}_1)\,|\,Q_1\in\Omega\}.$$

其中:

$$\begin{aligned}\Omega=\{Q_1\,|\,Q_1\in \mathrm{RH}_\infty,\det(Y_1-Q_1\overline{N}_1)\neq 0,\ \text{且}\ \exists\ Q_2\in\mathrm{RH}_\infty,\\ \det(Y_1-Q_1\overline{N}_1)\neq 0,T_{21}+QT_{41}-T_{11}Q-QT_{31}Q=0\}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

$Q=\text{block-diag}(Q_1,Q_2)$, $T_{i1}(i=1,2,3,4)$ 由式3.10决定.

**例 1**　求 $P_1=\dfrac{1}{s+1}$, $P_2=\dfrac{(2s+3)}{(s+1)(s-1)}$ 的同时镇定控制器.

对 $P_1,P_2$ 进行互质分解,有:

$$N_1=\overline{N}_1=\frac{1}{s+1},\quad D_1=\overline{D}_1=1,\quad X_1=\overline{X}_1=0,\quad Y_1=\overline{Y}_1=1,$$

$$N_2=\overline{N}_2=\frac{2s+3}{(s+1)^2},\quad D_2=\overline{D}_2=\frac{s-1}{s+1},$$

$$X_2=\overline{X}_2=\frac{4}{5},\quad Y_2=\overline{Y}_2=\frac{5s+7}{5(s+1)}.$$

代入式(3.10)得:

$$T_{11}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{s-1}{s+1}\\ \dfrac{5s+11}{5(s+1)} & 0\end{bmatrix},\quad T_{21}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{4}{5} & 0\end{bmatrix},$$

$$T_{31}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{s+4}{(s+1)^2}\\ -\dfrac{s+4}{(s+1)^2} & 0\end{bmatrix},\quad T_{41}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{5s+11}{5(s+1)}\\ \dfrac{s-1}{s+1} & 0\end{bmatrix}.$$

设 $Q=\text{block-diag}(Q_1,Q_2)$,则由约束条件式(3.11)得到:

$$4(s+1)^2-(5s+11)(s+1)Q_1+5(s^2-1)Q_2+5(s^2-1)Q_2+5(s+4)Q_1Q_2=0.$$

因此,$P_1,P_2$ 的同时镇定控制器可表示为

$$C_S=(Y_1-Q_1\overline{N}_1)^{-1}(X_1+Q_1\overline{D}_1)=\frac{(s+1)Q_1}{s+1-Q_1}.$$

其中 $Q_1\in\Omega$, $\Omega=\{Q_1\,|\,Q_1\in\mathrm{RH}_\infty$, 且 $\exists\ Q_2\in\mathrm{RH}_\infty$ 使得:

$$4(s+1)^2-(5s+11)(s+1)Q_1+5(s^2-1)Q_2+5(s+4)Q_1Q_2=0\}.$$

下面我们继续对 $s$ 个对象的同时镇定问题进行讨论. 假设 $P_1$ 为主对象,并设 $P_i=N_iD_i^{-1}=\overline{D}_i^{-1}\overline{N}_i$,为 $P_i$ 的稳定互质分解,即对于 $i=1,2,\cdots,s$ 式(3.7)成立. 类似于2个对

象时的推导，可知 $Q=[Q_{ij}], i,j=1,\cdots,s,(Q_{ii}\in G^{n\times m})$ 为块对角的，即 $Q_{ij}=0(\forall\ i\neq j)$.
对式(3.4)进行推导可得：

$$T_{1j}=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \phantom{Y_jD_1+X_jN_1} & \phantom{I_n} & \phantom{\cdots} & j & j+1 & \phantom{\cdots} & \phantom{I_n} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & Y_1D_j+X_1N_j & 0 & \cdots & 0 \\
0 & I_n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & \\
Y_jD_1+X_jN_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & I_n & \cdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & I_n
\end{bmatrix}
\end{array}, \tag{3.12}$$

令：

$$\overline{T}_{1j}=\begin{bmatrix} 0 & Y_1D_j+X_1N_j \\ Y_jD_1+X_jN_1 & 0 \end{bmatrix},\quad \overline{T}_{2j}=\begin{bmatrix} 0 & -Y_1\overline{X}_j+X_1\overline{Y}_j \\ -Y_j\overline{X}_1+X_j\overline{Y}_1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\overline{T}_{3j}=\begin{bmatrix} 0 & -\overline{N}_1D_j+\overline{D}_1N_j \\ -\overline{N}_jD_1+\overline{D}_jN_1 & 0 \end{bmatrix},\quad \overline{T}_{4j}=\begin{bmatrix} 0 & \overline{N}_1\overline{X}_j+\overline{D}_1\overline{Y}_j \\ \overline{N}_j\overline{X}_1+\overline{D}_j\overline{Y}_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

$\overline{Q}_j=\text{block-diag}\ (Q_1,Q_j),\quad j=2,3,\cdots,s.$

可将约束条件式(3.5)化为：

$$\overline{T}_{2j}+\overline{Q}_j\overline{T}_{4j}-\overline{T}_{1j}\overline{Q}_j-\overline{Q}_j\overline{T}_{3j}\overline{Q}_j=0,\quad j=2,3,\cdots,s. \tag{3.14}$$

这样我们就可得到用主对象参数表示的同时镇定控制器的参数化结果，而且将定理 3.1 的约束条件化为参数化表示时各个非主对象对参数的约束.

**定理 3.3** $s$ 个对象 $P_i,(P_i\in G^{m\times n})$ 的同时镇定问题的解的集合为

$$S_S(P_1,\cdots,P_S)=\{C_S=(Y_1-Q_1\overline{N}_1)^{-1}(X_1+Q_1\overline{D}_1)\,|\,Q_1\in\Omega\}.$$

其中
$$\Omega=\{Q_1\in RH_\infty\,|\det(Y_1-Q_1\overline{N}_1)\neq 0,\text{且}\ \exists\ Q_2,\cdots,Q_S\in RH_\infty,$$
$$\det(Y_j-Q_j\overline{N}_j)\neq 0,\overline{T}_{2j}+\overline{Q}_j\overline{T}_{4j}-\overline{T}_{1j}\overline{Q}_j-\overline{Q}_j\overline{T}_{3j}\overline{Q}_j=0,j=2,3,\cdots,s\}.$$

由定理 3.1 及以上推导可证明本定理，为节省篇幅，这里从略. 到此，我们得到了同时镇定控制器的参数化结果，其参数满足有限个相应的二次方程约束.

## 参 考 文 献

[1] Vidyasagar, M. and Viswanadham, N.. Algebraic Design Techniques for Reliable Stabilization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27:1085—1095

[2] Saeks, R. and Marray, J.. Fractional Representation Algebraic Geometry and the Simultaneous Stabilization Problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27:895—903

[3] Vidyasagar, M.. Control System Synthesis: A Factorization Approach. MIT Press Cambridge, MA, 1985

[4] Blondel, V., et al.. A Sufficient Condition for Simultaneous Stabilization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38:1264—1265

[5] Ghosh, B.K. and Byrnes, C. I.. Simultaneous Stabilization and Simultaneous Pole-Placement by Nonswitching Dynamic Control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, AC-28(6): 735—741

[6] Vidyasagar, M.. Some Results on Simultaneous Stabilization with Multiple Domains of Stability. Automatica, 1987, 23(4): 535—540

[7] Wei Kehui and Barmish, B. R.. An Iterative Design Procedure for Simultaneous Stabilization of MIMO Systems. 1988, Automatic, 24(5): 643—652

[8] Wu Dongnan, et al. Algorithm for Simultaneous Stabilition of Single-Input Systems via Dynamic Feedback. Int. J. Control, 1990, 51(3): 631—642

[9] Zhang Cishen, et al. Simultaneous Stabilization Using an LTI Compensator with a Sampler and Hold. Int. J. Control, 1993, 57(2):293—308

# The Parametrization of Simultaneous Stabilizing Controller Based on the Stable Coprime Factorization

CAO Yongyan and SUN Youxian

(Insititute of Industrial Process Control, Zhejiang University • Hangzhou, 310027, PRC)

**Abstract**: Based on the stable coprime factorization, a parametrization of all decentralized stabilizing controller is introduced and a parametrization of all simultaneous stabilizing controller is provided in terms of a parameter that is constrained to satisfy a finite number of quadratic equations which depend on the decetralized and simultaneous structure contraint.

**Key words**: stable coprime factorizition; simultaneous stabilization; decentralized control

## 本文作者简介

**曹永岩** 1968年生. 于1993年在武汉钢铁学院获工学硕士学位,现为浙江大学工业控制技术研究所博士研究生,主要感兴趣的研究领域有大系统理论及应用,鲁棒控制理论及应用,容错控制理论及应用等.

**孙优贤** 见本刊1995年第1期第10页.