第12卷第4期
1995年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 4
Aug., 1995

一类非线性不确定动态系统的鲁棒稳定控制器设计及 Benchmark 问题求解

彭晓红　陈兴林　张福恩
(哈尔滨工业大学控制工程系，150006)

摘要：本文研究一类非线性不确定动态系统的基于状态反馈的鲁棒稳定控制器设计问题，提出了一种基于状态反馈的非线性控制律，该控制器使得闭环系统鲁棒稳定. 对于 Benchmark 问题验证了所提控制律的正确性和有效性.

关键词：不确定系统；鲁棒控制；鲁棒稳定性；Benchmark 问题

1　引言及问题描述

设计不确定非线性动态系统的鲁棒稳定控制器主要有 Lyapunov 函数控制方法[1~2]和变结构控制方法[3~4]. 本文采用变结构控制研究一类不确定非线性动态系统的鲁棒稳定控制器设计，并将这一方法运用于解决 Benchmark 问题的设计.

Benchmark 问题研究由一弹簧连接的两物体的运动，见图 1. 图中 x_1 和 x_2 分别为 m_1 和 m_2 的位移，u_1 和 u_2 为控制力，w 为系统干扰，弹簧的弹性系数 K_f 为不确定性参数，$0.5 \leqslant K_f \leqslant 2$，其标称值为 1. 要求设计一种状态反馈控制器使得该闭环系统具有鲁棒稳定性[5].

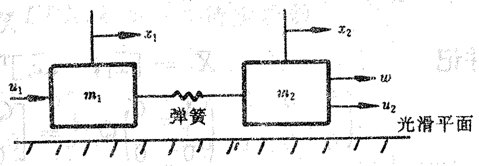

图 1　Benchmark 问题系统图

考虑如下一类非线性不确定系统：

$$\dot{X} = AX + Bu + F(t, X, u, \delta, w) \tag{1a}$$

$$Y = CX. \tag{1b}$$

其中 $X \in \mathrm{R}^n, u \in \mathrm{R}^m, y \in \mathrm{R}^p$；$A, B$ 及 C 为相应阶的矩阵，w 为系统的有界扰动. $\delta \in \Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为不确定性参数，Ω 为 R^n 中紧集. 假设系统(1)(A, B) 可控，$\mathrm{rank}B = r$.

文[6]就 $m < n$ 的情形研究了系统(1)的鲁棒稳定控制，通过构造 m 维换节面 $\sigma(X) = SX$ 和 $n - m$ 维滑动模态，在假设$(SB)^{-1}$ 存在的条件下设计了鲁棒稳定控制器[6]. 但是如果 $m = n$ 或者(SB)的逆不存在时，文[6]则无能为力了. 本文提出一种新的鲁棒稳定控制器设计方法，解决了上述问题，且无矩阵(SB)之逆存在的要求.

2　状态反馈控制器设计

考察代表非线性和不确定性的向量函数 F，这里假设它可分解成如下形式：

本文于 1994 年 3 月 1 日收到，1994 年 8 月 4 日收到修改稿.

$$F(t,X,u,\delta,w)=Df(t,X,\delta,w)+Bh(t,X,u,\delta,w). \tag{2}$$

并存在矩阵 R,使得 $D=BR$,且

$$\|f(t,X,\delta,w)\|\leqslant\alpha_f\|X\|+\beta_f, \tag{3}$$

$$\|h(t,X,u,\delta,w)\|\leqslant r_h\|u\|+\alpha_h\|X\|+\beta_h. \tag{4}$$

其中 $\alpha_f,\beta_f,r_h,\alpha_h,\beta_h$ 均为已知非负常数,而且 $0\leqslant r_h<\dfrac{\lambda_r}{\lambda_1\sqrt{m}}$,$\lambda_1$ 和 λ_r 分别为 B 的最大、最小奇异值,$\|\cdot\|$ 对于向量表示欧氏范数,对于矩阵表示相应的诱导矩阵范数.

由于 $\operatorname{rank}B=r$,根据奇异值分解定理,存在 $n\times n$ 酉矩阵 P 及 $m\times m$ 酉矩阵 Q,使得:

$$PBQ=\begin{pmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

其中 $\Sigma_r=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\}$ 且 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>0$,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 B 的奇异值.

记 $\quad E=[I_{m\times m},O_{m\times(n-m)}],\quad \operatorname{sgn}\sigma(X)=[\operatorname{sgn}\sigma_1(X),\cdots,\operatorname{sgn}\sigma_m(X)]^{\mathrm T}$.

其中 $I_{m\times m}$ 为 m 阶单位矩阵,$O_{m\times(n-m)}$ 为零矩阵,$\operatorname{sgn}\sigma_i(X)=\sigma_i(X)/|\sigma_i(X)|,i=1,2,\cdots,m$.

取如下形式的控制律: $\quad u=-k\,Q\operatorname{sgn}\sigma(X). \quad (6)$

其中 $\sigma(X)=EPX,k>0$ 为待定参数.

为讨论闭环系统的稳定性,取坐标变换:

$$\bar X=PX. \tag{7}$$

并记

$$\bar X_1=[\bar x_1,\cdots,\bar x_r]^{\mathrm T},\quad \bar X_2=[\bar x_{r+1},\cdots,\bar x_n]^{\mathrm T},$$

$$\begin{pmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1\\ 0\end{bmatrix},\quad PAP^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}.$$

则闭环系统(1),(6)表示为:

$$\dot{\bar X}_1=A_{11}\bar X_1+A_{12}\bar X_2-k[\lambda_1\operatorname{sgn}\bar x_1,\cdots,\lambda_r\operatorname{sgn}\bar x_r]^{\mathrm T}+Q_1\bar h+Q_1R\bar f, \tag{8}$$

$$\dot{\bar X}_2=A_{21}\bar X_1+A_{22}\bar X_2. \tag{9}$$

其中 $\bar h$ 和 $\bar f$ 分别为 h 和 f 经变换(7)后的表达式.

P 为可逆矩阵且(A,B)可控,则(PAP^{-1},PB)仍可控. 由于 Q_1 行满秩,易知子系统(A_{22},A_{21})可控,从而 $\bar X_2$ 可镇定.

记 $a_{ij}=\|A_{ij}\|,i,j=1,2$,注意到 $\|Q\|=1$,由式(2),(3),(7),沿闭环系统的轨线有

$$\mathrm d\|\bar X_1\|/\mathrm dt\leqslant\bar a_{11}\|\bar X_1\|+\bar a_{12}\|\bar X_2\|-\mu. \tag{10}$$

其中 $\bar a_{11}=a_{11}+\alpha_h\lambda_1+\alpha_f\lambda_1\|R\|$,$\bar a_{12}=a_{12}+\alpha_h\lambda_1+\alpha_f\lambda_1\|R\|$,$\mu=k(\lambda_r-\lambda_1r_h\sqrt{m})-\beta_h\lambda_1-\beta_f\lambda_1\|R\|$. 由于 $0\leqslant r_h<\dfrac{\lambda_r}{\lambda_1\sqrt{m}}$,只要适当选取参数 k,即可使 $\mu>0$. 于是有:

定理 1 如果系统(1)满足前面假设,记 $\Sigma=\{(\bar X_1,\bar X_2)\,|\,\bar a_{11}\|\bar X_1\|+\bar a_{12}\|\bar X_2\|<\mu\}$,则当 $k>\dfrac{\lambda_1\beta_h+\lambda_1\beta_f\|R\|}{\lambda_r-\lambda_1r_h\sqrt{m}}$ 时存在控制器(6)使得闭环系统轨线$(\bar X_1,\bar X_2)$中 $\bar X_2$ 可镇定,$\bar X_1$ 是渐近稳定的,其稳定区域为 Σ,且控制器(6)具有鲁棒性.

注 1　由于 P 为酉阵，根据(7)式，只需研究 $(\overline{X}_1,\overline{X}_2)$ 的稳定性即可. 闭环系统轨线 $\overline{X}_1$ 的稳定性区域为 Σ，见图 2. 由于 (A_{22},A_{21}) 可控，存在镇定矩阵 K 使 $\overline{X}_1=K\overline{X}_2$ 时，$\overline{X}_2$ 稳定，可见 $\overline{X}_2$ 的稳定区域只是 Σ 的一部分，此时 $\overline{X}$ 的稳定区域为 $\{(\overline{X},\overline{X}_2)|\bar{a}_{11}\|\overline{X}_1\|+\bar{a}_{12}\|\overline{X}_2\|<\mu$ 且 $\overline{X}_1=K\overline{X}_2\}$.

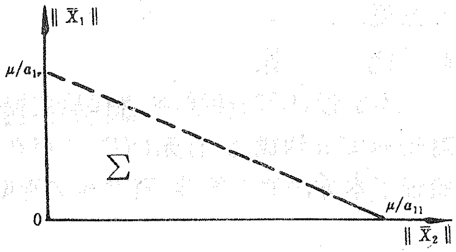

图 2　闭环系统轨线 $\overline{X}_1$ 的稳定区域 Σ

注 2　如果系统(1)为单输入系统，则 $\lambda_1=\lambda_r$，$m=1$，当 $k>\dfrac{\beta_h+\beta_f\|R\|}{1-r_h}$，$0\leqslant r_h<1$ 时，$\mu>0$，闭环系统稳定. 控制器参数 k 的选取与系统(1)的矩阵 B 和非线性项 F 有关，而与矩阵 A 无关.

3　Benchmark 问题求解

图 1 中 Benchmark 问题的数学模型表示如下：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&1&0&0\\1&-1&0&0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\delta(x_2-x_1)\\-\delta(x_2-x_1)+w\end{bmatrix}.$$

这里 $\delta=K_f-1$，$X=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$，$x_3$ 和 x_4 分别表示 m_1 与 m_2 的速度. $\mathrm{rank}B=2$，B 的奇异值为 $\{1,1\}$.

取控制律 $u=-kQ\mathrm{sgn}\sigma(X)$，其中 $\sigma(X)=EPX$，$k>0$ 为待定参数，

$$P=P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

取坐标变换 $\overline{X}=PX$，记 $\overline{X}_1=[\bar{x}_1,\bar{x}_2]^{\mathrm{T}}$，$\overline{X}_2=[\bar{x}_3,\bar{x}_4]^{\mathrm{T}}$，则

$$\dot{\overline{X}}_1=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\overline{X}_2-k\begin{bmatrix}\mathrm{sgn}\bar{x}_1\\\mathrm{sgn}\bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta(\bar{x}_4-\bar{x}_3)\\-\delta(\bar{x}_4-\bar{x}_3)+w\end{bmatrix},\tag{11}$$

$$\dot{\overline{X}}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\overline{X}_2+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\overline{X}_1.\tag{12}$$

由定理 1 可知：$\dfrac{\mathrm{d}\|\overline{X}_1\|}{\mathrm{d}t}\leqslant\sqrt{2}\|\overline{X}_2\|-k+\sqrt{\delta^2\Delta^2+(w-\delta\Delta)^2}$.

其中 $\Delta=\bar{x}_4-\bar{x}_3=x_2-x_1$. 由于 x_2-x_1 是 m_1 和 m_2 的位移之差，因此 $\sqrt{\delta^2\Delta^2+(w-\delta\Delta)^2}\leqslant\beta$ 有界，取 $\mu=k-\beta$，当 $k>\beta$ 时 $\mu<0$. 因此该闭环系统的轨线 $(\overline{X}_1,\overline{X}_2)$ 中 $\overline{X}_1$ 渐近稳定，其稳定区域为 $\Sigma=\{(\overline{X}_1,\overline{X}_2\}|\|\overline{X}_2\|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mu\}$. 由定理 1 可知 $\overline{X}_2$ 可镇定. 由于 $X=P^{-1}\overline{X}$，因而上面所设计的控制器使闭环系统鲁棒稳定.

注意到 $F=Bh+BRf$，$R=I_{2\times2}$，$h=[0,-\delta(x_2-x_1)]^{\mathrm{T}}$，$f=[\delta(x_2-x_1),w]^{\mathrm{T}}$，显然 $\|h\|$ 及 $\|f\|$ 均有界. 令 $\|h\|\leqslant\beta_h$，$\|f\|\leqslant\beta_f$，这里 β_h 和 β_f 与 δ，w 和 x_2-x_1 的界有关. 经计算得 $\beta=\beta_h+\beta_f$，即当 $k\geqslant\beta_h+\beta_f$ 时，该闭环系统稳定.

而文[6]中 $k\geqslant\beta_h+1.6634\beta_f$，显然本文设计的鲁棒稳定控制器增益幅值小，工程实

现方便.

4 结 论

本文设计了一种新的鲁棒稳定控制器使得一类非线性不确定系统闭环稳定. 此方法对于 $m \leqslant n$ 均成立. 且无 $(SB)^{-1}$ 存在的要求,弥补了文[6]的不足. 对于 Benchmark 问题验证了本方法的有效性,同时本文所设计的鲁棒稳定控制器增益幅值小,工程容易实现.

参考文献

[1] Barmish, B. R. and Leitmann, G.. On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumption. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27:153—158

[2] Ryan, E. P. and Corless, M.. Ultimate Boundedness and Asympotic Stability of a Class of Uncertain Dynamical Systems via Continous and Discontinous Feedback Control. IMA J. Math. Control Inform., 1984, 1:223—242

[3] EL-Ghezawi, O. M. E. and Billings, S. A.. Analysis and Design of Variable Structure Systems Using a Geometric Approach. Int. J. Control, 1983, 38:657—671

[4] Hui, S. and Zak, S. H.. Control and Observation of Uncertain Systems: A Variable Structure Systems Approach. In C. T. Leondes(Ed.) Control and Dynamic Systems, San Diego: Academic Press, 1990, 34(Part 1): 175—204

[5] Wei, B. and Bernstein, D. S.. A Benchmark Problem for Robust Control Design. Proc. 1990 American Control Conf. (ACC), 1990, San Diego, CA, 961—962

[6] Hui, S. and Zak, S. H.. Robust Control Synthesis for Uncertain Nonlinear Dynamical Systems. Automatica, 1992, 28(2):289—298

Design for Stability Robust Controller of a Class of Uncertain Nonlinear Dynamical Systems and Solution for Benchmark Problem

PENG Xiaohong, CHEN Xinlin and ZHANG Fu'en

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150006, PRC)

Abstract: This paper addresses the problem of robust state feedback controller design for a class of uncertain nonlinear dynamical systems. A nonlinear control law based on state feedback is designed which stabilize the closed-loop system. The result proposed of control law is verified by its applications to Benchmark problem for robust control design.

Key words: uncertain systems; robust control; robust stability; Benchmark problem

本文作者简介

彭晓红 1968年生. 1992年于哈尔滨工业大学数学系获硕士学位,现为哈尔滨工业大学控制工程系博士研究生,研究方向为鲁棒控制、计算机控制、飞行器控制及仿真.

陈兴林 1963年生. 1991年于哈尔滨工业大学控制工程系获硕士学位,1994年获博士学位. 现为哈尔滨工业大学控制工程系讲师. 研究方向为鲁棒控制、计算机控制、飞行器控制及仿真.

张福恩 1936年生. 1961年毕业于哈尔滨工业大学自动控制专业. 现为哈尔滨工业大学控制工程系教授,博士生导师,研究方向为系统设计理论、鲁棒控制、计算机控制、飞行器控制及仿真.