第12卷第5期
1995年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 5
Oct., 1995

动态系统白噪声估计理论*

邓自立

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨,150080)

摘要：本文用时域上的新息分析方法提出了一种统一的和通用的动态系统白噪声估计理论，并给出了处理 Mendel 去卷问题的仿真例子.

关键词：最优和自校正白噪声估值器；去卷；相关噪声

1 引 言

动态系统白噪声估计广泛应用于去卷，也称反卷积(Deconvolution)[1]、状态估计[2]、通讯和信号处理[3]等领域. 本文将文[2]的白噪声估值器推广到带非零均值的相关白噪声和带有色观测噪声情形，形成统一的和通用的白噪声估计理论，并给出了处理 Mendel 去卷问题[1]的仿真应用结果.

考虑线性离散时间动态系统

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})w(t) + C(q^{-1})v(t). \tag{1}$$

其中输出 $y(t) \in \mathrm{R}^m$，输入白噪声 $w(t) \in \mathrm{R}^r$，观测白噪声 $v(t) \in \mathrm{R}^m$，q^{-1} 是单位滞后算子，$A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ 是多项式矩阵，形如

$$X(q^{-1}) = X_0 + X_1 q^{-1} + \cdots + X_{n_x} q^{-n_x}. \tag{2}$$

其中 X_i 为系数阵，n_x 为阶次. 设 $A_0 = I_m, C_0 = I_m, B_k \neq 0, B_{k-1} = \cdots = B_0 = 0, k > 0$ 为时滞，I_m 为 $m \times m$ 单位阵，0 为零阵. 设初始观测时刻 $t_0 = 0$.

假设 1 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是带非零均值的相关白噪声，$Ew(t) = q_w, Ev(t) = q_v, \mathrm{var}(w(t)) = Q_w, \mathrm{var}(v(t)) = Q_v, \mathrm{cov}(w(t), v(i)) = S\delta_{ti}; \delta_{ti} = 0\ (t \neq i), \delta_{tt} = 1$.

假设 2 $(A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ 左素.

最优白噪声估计问题是：基于观测 $(y(0), \cdots, y(t+N))$ 求 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的最优(即线性最小方差)估值器 $\hat{w}(t|t+N)$ 和 $\hat{v}(t|t+N)$. 对 $N > 0, N = 0$ 和 $N < 0$，它们分别叫平滑器、滤波器和预报器.

2 主要结果

类似于文[2]的推导，可得如下定理，限于篇幅，证明从略.

定理 1 $y(t)$ 的 ARMA 新息模型为

$$A(q^{-1})y(t) = \rho + D(q^{-1})e(t). \tag{3}$$

其中新息过程 $e(t)$ 是零均值、方差阵为 Q_e 的白噪声，$D(q^{-1})$ 是稳定的，$D_0 = I_m, n_d = \max(n_c, n_b - k)$，且

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1993 年 8 月 30 日收到. 1994 年 5 月 16 日收到修改稿.

$$D(q^{-1})e(t)=B(q^{-1})(w(t)-q_w)+C(q^{-1})(v(t)-q_v), \tag{4}$$

$$\rho=B(1)q_w+C(1)q_v. \tag{5}$$

定理 2 稳态最优白噪声估值器为 $(N>0)$

$$\hat{w}(t|t+N)=q_w+\sum_{i=0}^{N}(Q_wF_i^{\mathrm{T}}+SG_i^{\mathrm{T}})Q_e^{-1}e(t+i), \tag{6}$$

$$\hat{v}(t|t+N)=q_v+\sum_{i=0}^{N}(Q_vG_i^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}})Q_e^{-1}e(t+i). \tag{7}$$

其中 T 为转置号，且 F_i 和 G_i 可递推计算为

$$F_i=-\sum_{j=1}^{\min(i,n_d)}D_jF_{i-j}+B_i,\quad F_0=0;\quad B_i=0,\quad i>n_b; \tag{8}$$

$$G_i=-\sum_{j=1}^{\min(i,n_d)}D_jG_{i-j}+C_i,\quad G_0=I_m;\quad C_i=0,\quad i>n_C,\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{9}$$

特别有 $\hat{w}(t+N|t)=q_w$，$\hat{v}(t+N|t)=q_v$，且

$$\hat{w}(t|t)=q_w+SQ_e^{-1}e(t),\quad \hat{v}(t|t)=q_v+Q_vQ_e^{-1}e(t). \tag{10}$$

定理 3 估值器(6)和(7)式的估值误差方差阵分别为

$$P_w(t|t+N)=Q_w-\sum_{i=0}^{N}(Q_wF_i^{\mathrm{T}}+SG_i^{\mathrm{T}})Q_e^{-1}(F_iQ_w+G_iS^{\mathrm{T}}), \tag{11}$$

$$P_v(t|t+N)=Q_v-\sum_{i=0}^{N}(Q_vG_i^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}})Q_e^{-1}(G_iQ_v+F_iS), \tag{12}$$

特别有

$$P_w(t|t)=Q_w-SQ_e^{-1}S^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

$$P_v(t|t)=Q_v-Q_vQ_e^{-1}Q_v. \tag{14}$$

定理 4 $\hat{w}(t|t+N)$ 和 $\hat{v}(t|t+N)$ 有递推公式

$$\hat{w}(t|t+N)=\hat{w}(t|t+N-1)+(Q_wF_N^{\mathrm{T}}+SG_N^{\mathrm{T}})Q_e^{-1}(t+N), \tag{15}$$

$$\hat{v}(t|t+N)=\hat{v}(t|t+N-1)+(Q_vG_N^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}F_N^{\mathrm{T}})Q_e^{-1}(t+N). \tag{16}$$

其中 $N>0$，初值分别为 $\hat{w}(t|t)$ 和 $\hat{v}(t|t)$.

定理 5 设 $m\geqslant r$，且 $B(1)$ 是列满秩的，并设 $C(1)$ 是非异的，则有均值公式：

$$q_w=B(1)^{*}[\rho-C(1)q_v], \tag{17}$$

$$q_v=C(1)^{-1}[\rho-B(1)q_w]. \tag{18}$$

其中伪逆 $B(1)^{*}=[B(1)^{\mathrm{T}}B(1)]^{-1}B(1)^{\mathrm{T}}$.

定理 6 噪声统计 Q_e,Q_w,Q_v 和 S 满足如下矩阵代数方程组

$$\sum_{j=i}^{n_d}D_jQ_eD_{j-i}^{\mathrm{T}}=\sum_{j=i}^{n_s}B_jQ_wB_{j-i}^{\mathrm{T}}+\sum_{j=i}^{n_s}C_jQ_vC_{j-i}^{\mathrm{T}}+\sum_{j=i}^{n_s}B_jSC_{j-i}^{\mathrm{T}}+\sum_{j=i}^{n_s}C_jS^{\mathrm{T}}B_{j-i}^{\mathrm{T}}. \tag{19}$$

其中，$i=0,1,\cdots,n_d$，并规定 $B_j=0,j>n_b$；$C_j=0,j>n_c$；$n_s=\max(n_b,n_c)$.

定理 7 新息 $e(t)$ 可由(3)式递推计算为

$$e(t)=A(q^{-1})y(t)-\rho-D_1e(t-1)-\cdots-D_{n_d}e(t-n_d),\quad t=0,1,\cdots. \tag{20}$$

带初值 $(y(-1),\cdots,y(-n_a),e(-1),\cdots,e(-n_d))$. 新息 $e(t)$ 的计算是渐近稳定的，即 $e(t)$

渐近地不依赖于(20)式的初值的选取.并且定理2给出的白噪声估值器 $\hat{w}(t|t+N)$ 和 $\hat{v}(t|t+N)$ 也是渐近稳定的.即它们渐近地与(20)式的初值无关.

注意,当 $A(q^{-1}),Q_w$ 和 Q_v 未知时,用直接在线辨识ARMA新息模型(3)式伴随最优的噪声估值器可引出自校正白噪声估值器[3].

3 处理Mendel去卷问题

以油田地震勘探为应用背景,Mendel[1]去卷问题是求如下系统的输入白噪声 $w(t)$ 的估值器 $\hat{w}(t|t+N)$,

$$x(t+1)=Ax(t)+Bw(t), \tag{21}$$

$$y(t)=Hx(t)+v(t). \tag{22}$$

其中 $x(t)\in \mathrm{R}^n, y(t)\in \mathrm{R}^m, w(t)\in \mathrm{R}^r$,设 $w(t)$ 和 $v(t)$ 满足假设1.为简单计,设 (A,H,B) 具有典范形(块伴随形)

$$A=\begin{bmatrix}-A_1 & & \\ \vdots & I_{(p-1)m} & \\ -A_p & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},\quad H=[I_m\quad 0\quad \cdots\quad 0],\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_p\end{bmatrix}. \tag{23}$$

其中 $n=mp, A_i$ 为 $m\times m$ 阵, B_i 为 $m\times r$ 阵,易知(21)~(23)式等价于输入输出模型

$$A(q^{-1})y(t)=B(q^{-1})w(t)+A(q^{-1})v(t). \tag{24}$$

其中定义 $A(q^{-1})=I_m+A_1q^{-1}+\cdots+A_pq^{-p}, B(q^{-1})=B_1q^{-1}+\cdots+B_pq^{-p}$.设系统(21)和(22)式是完全可观、完全可控的,则有 $(A(q^{-1}),B(q^{-1}))$ 左素,从而(24)式满足假设2,于是可用定理2求 $\hat{w}(t|t+N)$.

4 仿真例子

在(21)~(23)式中取 $n=2,m=1,r=1$ 有系统

$$x(t+1)=\begin{bmatrix}-a_1 & 1\\ -a_2 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}w(t), \tag{25}$$

$$y(t)=[1\quad 0]x(t)+v(t). \tag{26}$$

设 $w(t)$ 是Bernoulli-Gaussian白噪声, $w(t)=\xi(t)\eta(t)$,其中 $\xi(t)$ 是取值0和1的Bernoulli白噪声,概率为 $P(\xi(t)=1)=\lambda, P(\xi(t)=0)=1-\lambda$.而 $\eta(t)$ 是零均值、方差为 σ_η^2 的

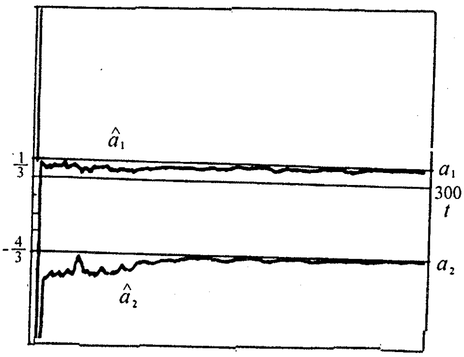

图1 RELS参数估值的收敛性

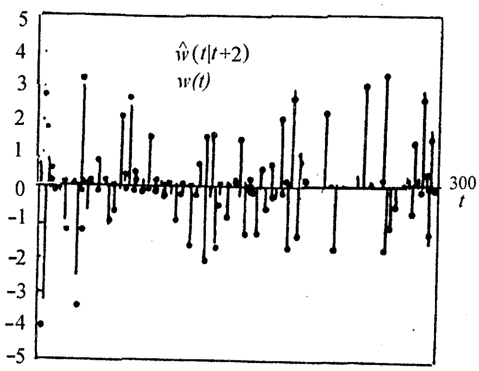

图2 Bernoulli-Gaussian白噪声 $w(t)$ 和自校正平滑器 $\hat{w}(t|t+2)$

Gaussian 白噪声. 取 $a_1 = 1/3, a_2 = -4/3, b_1 = 1, b_2 = 0, \lambda = 0.2, \sigma_\eta^2 = 2$，并取 $v(t) = \beta(t) + 0.03w(t)$，$\beta(t)$ 是零均值、方差为 $\sigma_\beta^2 = 0.04$ 的 Gaussian 白噪声. 这引出 $\sigma_w^2 = 0.4, \sigma_v^2 = 0.04036, s = 0.012$，仿真中设 $a_1, a_2, \sigma_w^2, \sigma_v^2$ 和 s 是未知的，用本文方法仿真结果如图 1 和图 2 所示. 图 1 表示 ARMA 新息模型的递推增广最小二乘法(RELS) 参数估值 $\hat{a}_1(t)$ 和 $\hat{a}_2(t)$ 的收敛性. 图 2 表示 $w(t)$ 和自校正平滑器 $\hat{w}(t|t+2)$，其中"线段" 代表 $w(t)$，"园点" 代表 $\hat{w}(t|t+2)$.

参 考 文 献

[1] Mendel, J. M.. White Noise Estimators for Seismic Data Processing in Oil Exproration. IEEE Trans Automat. Contr., 1977, AC-22: 694—706

[2] 邓自立，张焕水. 自校正 Kalman 滤波、预报、去卷、平滑新方法. 控制理论与应用, 1994, 11(2): 137—145

[3] Moir, T. J. et al.. Real-Time Self-Tuning Deconvolution Filter and Smoother. Int. J. Control, 1987, 45: 969—985

White Noise Estimation Theory for Dynamic Systems

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

Abstract: Using the innovation analysis method in the time domain, this paper presents a unified and general white noise estimation theory for dynamic systems, and a simulation example is given for treatting Mendel's deconvolution problem.

Key words: optimal and self-tuning white noise estimators; deconvolution; correlated noises

本文作者简介

邓自立 见本刊 1995 年第 2 期第 218 页.