第 12 卷第 5 期
1995 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 12, No. 5
Oct., 1995

Lurie 型控制系统的鲁棒决定稳定性

年晓红

（天水师范专科学校数学系·甘肃，741001）

摘要：本文给出了 Lurie 型间接控制系统 $\dot{x}=G[B,C]x+G[R,S]f(\sigma)$；$\dot{\sigma}=c^{\mathrm{T}}x-\rho f(\sigma)$；$f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty)$；和直接控制系统 $\dot{x}=G[B,C]x+G[R,S]f(\sigma)$；$\sigma=c^{\mathrm{T}}x$，$f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty)$. 绝对稳定的若干充分条件.

关键词：Robust 控制系统；区间矩阵；绝对稳定性

1 引言和引理

考虑 Lurie 型 Robust 间接控制系统

$$\dot{x}=G[B,C]x+G[R,S]f(\sigma);\quad \dot{\sigma}=c^{\mathrm{T}}x-\rho f(\sigma);\quad f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty);\tag{1.1}$$

和直接控制系统

$$\dot{x}=G[B,C]x+G[R,S]f(\sigma);\quad \sigma=c^{\mathrm{T}}x,\quad f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty).\tag{1.2}$$

这里，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$；$G[B,C]$ 为 $n\times n$ 阶区间矩阵，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times n}$，$G[R,S]$ 为 $n\times 1$ 区间矩阵，$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^{\mathrm{T}}$；$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$；$\overline{K}[0,\infty)=\{f(\sigma)\,|\,f(0)=0,\ 0<\sigma f(\sigma)<\infty\ (\sigma\neq 0)\}$.

同时考虑系统

$$\dot{x}=Ax+bf(\sigma),\quad \dot{\sigma}=c^{\mathrm{T}}x-\rho f(\sigma),\quad f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty),\tag{1.3}$$

$$\dot{x}=Ax+bf(\sigma),\quad \sigma=c^{\mathrm{T}}x,\quad f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty).\tag{1.4}$$

这里 $$A\in G[B,C],\quad b\in G[R,S].$$

定义 若对任意 $f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty)$，系统(1.3)，(1.4)全局渐近稳定，则分别称系统(1.1)，(1.2)绝对稳定.

Lurie 控制系统稳定性的研究历史悠久，我国学者最近得到了一些很好的结论（见文[1]～[3]），由于 $G[B,C]$ 的稳定性讨论起来很困难，Lurie 控制系统的 Robust 稳定性目前很少有人讨论（见文[4,5]），下面我们将分别在 2，3 中讨论(1.1)，(1.2)的绝对稳定性.

在本文中我们约定：对任意矩阵 $D=(d_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $|D|=(|d_{ij}|)_{m\times n}$，特别地：设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则 $|x|=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_m|)^{\mathrm{T}}$；$|y|=(|y_1|,|y_2|,\cdots,|y_n|)^{\mathrm{T}}$.

引理 设 $x^{\mathrm{T}}Dy\leqslant|x|^{\mathrm{T}}|D||y|$.

证 $$x^{\mathrm{T}}Dy=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_iy_j\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}||x_i||y_j|=|x|^{\mathrm{T}}|D||y|.$$

本文于 1994 年 5 月 9 日收到. 1994 年 10 月 25 日收到修改稿.

2 间接控制系统的绝对稳定性

设 $A_0=\frac{1}{2}(B+C)$, $K=\frac{1}{2}(C-B)$; $b_0=\frac{1}{2}(S+R)$; $T=\frac{1}{2}(S-R)$; 则(1.3)可写为

$$\dot{x}=A_0x+b_0f(\sigma)+(A-A_0)x+(b-b_0)f(\sigma);$$
$$\dot{\sigma}=c^{\mathrm{T}}x-\rho f(\sigma),\quad f(\sigma)\in\overline{K}[0,\infty). \tag{2.1}$$

假定 A_0 稳定,由 Lyapunov 定理可知:对于任给定的正定矩阵 W,存在唯一的正定和矩阵 V,满足 $A_0^{\mathrm{T}}V+VA_0=-W$,取 Lyapunov 函数 $v(x,f)=x^{\mathrm{T}}Vx+\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)}&=\left.[\dot{x}^{\mathrm{T}}Vx+\dot{x}^{\mathrm{T}}Vx+\dot{\sigma}f(\sigma)]\right|_{(2.1)}\\
&=[A_0x+b_0f(\sigma)+(A-A_0)x+(b-b_0)f(\sigma)]^{\mathrm{T}}Vx\\
&\quad+x^{\mathrm{T}}V[A_0x+b_0f(\sigma)+(A-A_0)x+(b-b_0)f(\sigma)]\\
&\quad+[c^{\mathrm{T}}x-\rho f(\sigma)]f(\sigma)\\
&=-x^{\mathrm{T}}Wx+2f(\sigma)d^{\mathrm{T}}x-\rho f^2(\sigma)+x^{\mathrm{T}}[(A-A_0)^{\mathrm{T}}V+V(A-A_0)]x\\
&\quad+[(b-b_0)^{\mathrm{T}}Vx+x^{\mathrm{T}}V(b-b_0)]f(\sigma)\\
&\leqslant-x^{\mathrm{T}}Wx+2f(\sigma)d^{\mathrm{T}}x-\rho f^2(\sigma)+|x|^{\mathrm{T}}[|K|^{\mathrm{T}}|V|\\
&\quad+|V||K|]|x|+2|V||T||f(\sigma)||x|.
\end{aligned}$$

其中
$$d=Vb_0+\frac{1}{2}c.$$

令
$$P=|K|^{\mathrm{T}}|V|+|V||K|;\quad Q=|V||T|.$$

则
$$\left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)}\leqslant-(x^{\mathrm{T}},f(\sigma))\begin{pmatrix}W&-d\\-d&\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(\sigma)\end{pmatrix}$$
$$+(|x^{\mathrm{T}}|,|f(\sigma)|)\begin{pmatrix}P&Q\\Q^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|x|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}.$$

由实对称矩阵的性质可知存在实常数 γ,使得

$$(x^{\mathrm{T}},f(\sigma))\begin{pmatrix}W&-d\\-d&\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(\sigma)\end{pmatrix}\leqslant\gamma(|x^{\mathrm{T}}|,|f(\sigma)|)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}|x^{\mathrm{T}}|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}.$$

故
$$\left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)}\leqslant(|x^{\mathrm{T}}|,|f(\sigma)|)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}P-\gamma I&Q\\Q^{\mathrm{T}}&-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|x^{\mathrm{T}}|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}.$$

我们有如下定理:

定理 2.1 若矩阵

$$\begin{pmatrix}P-\gamma I&Q\\Q^{\mathrm{T}}&-\gamma\end{pmatrix}$$

负定,则系统(1.1)绝对稳定.

如果取 $W=-2I$,则由著名的 Barbarsin 公式可求出 V 满足 $A_0^{\mathrm{T}}V+VA_0=-2I$, 于是

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)}&\leqslant-2x^{\mathrm{T}}Ix+2f(\sigma)d^{\mathrm{T}}x-\rho f^2(\sigma)+|x|^{\mathrm{T}}[|K|^{\mathrm{T}}|V|\\
&\quad+|V||K|]|x|+2|V||T||f(\sigma)||x|\\
&\leqslant-(|x^{\mathrm{T}}|,|f(\sigma)|)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2I-P&-U\\-U^{\mathrm{T}}&\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|x^{\mathrm{T}}|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

这里 $P = |K|^{\mathrm{T}}|V| + |V||K|$；$U = |d| + |V||T|$；我们有下面定理：

定理 2.2 若矩阵

$$\begin{pmatrix} 2I - P & -U \\ -U^{\mathrm{T}} & \rho \end{pmatrix}$$

正定，则系统(1.1)绝对稳定.

3 直接控制系统的绝对稳定性

系统(1.2)可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0x + b_0f(\sigma) + (A - A_0)x + (b - b_0)f(\sigma); \\ \sigma &= c^{\mathrm{T}}x, \quad f(\sigma) \in \overline{K}[0,\infty). \end{aligned} \tag{3.1}$$

假定 A_0 稳定，由 Lyapunov 定理可知对于任给定的正定矩阵 W，存在唯一的正定矩阵 V，满足 $A_0^{\mathrm{T}}V + VA_0 = -W$，取 Lyapunov 函数 $v(x,f) = x^{\mathrm{T}}Vx + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$，则

$$\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^{\mathrm{T}}Vx + x^{\mathrm{T}}V\dot{x} + \dot{\sigma}f(\sigma).$$

由(3.1)可知

$$\dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}}A_0x + c^{\mathrm{T}}b_0f(\sigma) + c^{\mathrm{T}}(A - A_0)x + c^{\mathrm{T}}(b - b_0)f(\sigma).$$

令 $c_1^{\mathrm{T}} = c^{\mathrm{T}}A_0$，$-r = c^{\mathrm{T}}b_0$，则

$$\dot{\sigma} = c_1^{T}x - rf(\sigma) + c^{T}(A - A_0)x + c^{T}(b - b_0)f(\sigma),$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.1)} = &- x^{\mathrm{T}}Wx + 2\left(Vb_0 + \frac{1}{2}c_1\right)^{\mathrm{T}} f(\sigma)x - rf^2(\sigma) + x^{\mathrm{T}}[(A - A_0)^{\mathrm{T}}V \\ &+ V(A - A_0)]x + [x^{\mathrm{T}}V(b - b_0) + (b - b_0)^{\mathrm{T}}Vx]f(\sigma) \\ &+ c^{\mathrm{T}}(A - A_0)f(\sigma)x + c^{\mathrm{T}}(b - b_0)f^2(\sigma) \\ \leqslant &- x^{\mathrm{T}}Wx + 2\left(Vb_0 + \frac{1}{2}c_1\right)^{\mathrm{T}} f(\sigma)x - rf^2(\sigma) \\ &+ |x|^{\mathrm{T}}[|K|^{\mathrm{T}}|V| + |V||K|]|x| \\ &+ 2\left[|V||T| + \frac{1}{2}|c||K|\right]^{\mathrm{T}}|x||f(\sigma)| + |c|^{\mathrm{T}}|T|f^2(\sigma). \end{aligned}$$

令 $P = |K|^{\mathrm{T}}|V| + |V||K|$，$Q = \left[|V||T| + \frac{1}{2}|c||K|\right]$，$\alpha = |c|^{\mathrm{T}}|T|$，$d = \left(Vb_0 + \frac{1}{2}c_1\right)$；则

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.1)} \leqslant &- x^{\mathrm{T}}Wx + 2f(\sigma)d^{\mathrm{T}}x - rf^2(\sigma) + |x|^{\mathrm{T}}P|x| \\ &+ 2Q^{\mathrm{T}}|f(\sigma)||x| + \alpha f^2(\sigma). \end{aligned}$$

在上式的右边加减项 $\sigma f(\sigma)$，令 $\delta = d + \frac{1}{2}c = \left(Vb_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c\right)$，则

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.1)} \leqslant &(x^{\mathrm{T}}, f(\sigma))\begin{pmatrix} -W & \delta \\ \delta^{\mathrm{T}} & -r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ f(\sigma) \end{pmatrix} \\ &+ (|x|^{\mathrm{T}}, |f(\sigma)|)\begin{pmatrix} P & Q \\ Q^{\mathrm{T}} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |x|^{\mathrm{T}} \\ |f(\sigma)| \end{pmatrix} - \sigma f(\sigma). \end{aligned}$$

由实对称矩阵的性质可知存在常数 r，使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.1)} \leqslant -\gamma(|x|^{\mathrm{T}},|f(\sigma)|)\begin{pmatrix}|x|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}$$

$$+(|x|^{\mathrm{T}},|f(\sigma)|)\begin{pmatrix}P & Q\\Q^{\mathrm{T}} & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|x|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}-\sigma f(\sigma)$$

$$=(|x|^{\mathrm{T}},|f(\sigma)|)\begin{pmatrix}P-\gamma I & Q\\Q^{\mathrm{T}} & \alpha-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|x|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}-\sigma f(\sigma),$$

于是得到下面定理：

定理 3.1 若矩阵

$$\begin{pmatrix}P-\gamma I & Q\\Q^{\mathrm{T}} & \alpha-\gamma\end{pmatrix}$$

负定，则系统(1.2)绝对稳定.

若取 $W=-2I$，则由著名的 Barbarsin 公式可求出 V 满足 $A_0^{\mathrm{T}}+VA_0=-2I$，于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}v(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.1)} \leqslant -2|x|^{\mathrm{T}}I|x|+2|f(\sigma)||d|^{\mathrm{T}}|x|-rf^2(\sigma)$$

$$+|x|^{\mathrm{T}}P|x|+2Q^{\mathrm{T}}|f(\sigma)||x|+\alpha f^2(\sigma)-\sigma f(\sigma)$$

$$=-(|x|^{\mathrm{T}},|f(\sigma)|)\begin{bmatrix}P_1 & -U\\-U^{\mathrm{T}} & \alpha_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}|x|\\|f(\sigma)|\end{pmatrix}-\sigma f(\sigma).$$

这里
$$d=\left(Vb_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c\right);$$

$$P_1=2I-P=2I-|K|^{\mathrm{T}}|V|-|V||K|;$$

$$U=Q+|d|=[|V||T|+\frac{1}{2}|c||K|]+|d|;$$

$$\alpha_1=r-\alpha=|c|^{\mathrm{T}}|T|-\alpha.$$

于是我们有下面定理.

定理 3.2 若矩阵

$$\begin{bmatrix}P_1 & -U\\-U^{\mathrm{T}} & \alpha_1\end{bmatrix}$$

正定，则系统(1.2)绝对稳定.

4 应用举例

例 4.1 考虑系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}[-4.5,-3.5] & [1.5,2.5]\\ [-3.5,-2.5] & [-4.5,-3.5]\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}[0.5,1.5]f(\sigma)\\ [0.5,1.5]f(\sigma)\end{pmatrix},$$

$$\dot{\sigma}=x_1+x_2-2f(\sigma).$$

这里
$$c=(1,1)^{\mathrm{T}};\quad b_0=(1,1)^{\mathrm{T}},\quad T=(0.5,0.5)^{\mathrm{T}};$$

取
$$A_0=\begin{pmatrix}-4 & 2\\-3 & -4\end{pmatrix};\quad K=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\0.5 & 0.5\end{pmatrix};\quad V=\begin{pmatrix}47/176 & -4/176\\-4/176 & 47/176\end{pmatrix}.$$

由于矩阵 $\begin{pmatrix}2I-P & -U\\-U^{\mathrm{T}} & \rho\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1.7 & -0.3 & 1\\-0.3 & 1.7 & 1\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 正定，故由定理 2.2 可知该系统绝

对稳定.

例 4.2 考虑系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[-0.9,-1.1] & [-0.1,0.1]\\ [-0.1,0.1] & [-0.9,-1.1]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[-0.9,-1.1]f(\sigma)\\ [-0.9,-1.1]f(\sigma)\end{pmatrix},$$

$$\sigma = x_1 + x_2 = (1,1)(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}.$$

这里 $c=(1,1)^{\mathrm{T}}$;取 $V=I$, $A_0=-I$, $b_0=(-1,-1)^{\mathrm{T}}$,由于矩阵

$$\begin{bmatrix}-0.3 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.3 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & -0.3\end{bmatrix}$$ 负定,由定理 3.1 可知该系统绝对稳定.

参 考 文 献

[1] 赵素霞. 关于直接控制系统的绝对稳定性. 数学学报,1979,22(4):404—419
[2] 朱思铭. 直接控制系统的绝对稳定性准则. 中山大学学报,1979,(3):20—28
[3] 廖晓昕. 一般 Лypbe 控制系统绝对稳定的新判据. 数学学报,1990,33(6):841—852
[4] 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京:科学出版社,1991,193—592
[5] 舒仲周. 运动稳定性. 成都:西南交通大学出版社,1989,333—338

Robust Stability for Lurie Control Systems

NIAN Xiaohong
(Department of Mathematics, TianShui Teacher's College • Gansu, 741000, RPC)

Abstract: In this paper, some sufficent conditions for stability of Lurie robust control systems $\dot{x} = G[B,C]x + G[R,S]f(\sigma)$; $\dot{\sigma} = c^{\mathrm{T}}x - \rho f(\sigma)$, $f(\sigma) \in \overline{K}[0,\infty)$; and $\dot{x} = G[B,C]x + G[R,S]f(\sigma)$; $\sigma = c^{\mathrm{T}}x$, $f(\sigma) \in \overline{K}[0,\infty)$ have been given.

Key words: robust control systems; interval matrix; absolute stability

本文作者简介

年晓红 1965 年生. 讲师. 1985 年毕业于西北师范大学数学系,1992 年在山东大学获得硕士学位,主要研究方向为常微分方程稳定性和区间动力系统稳定性,已发表学术论文十余篇.